

Análisis complejo

Xavier Rivas

Junio 2022

Índice general

Introducción	VII
1. El plano complejo	1
1.1. Introducción y objetivos	1
1.2. El cuerpo de los números complejos	2
1.3. Topología del plano complejo	6
1.4. Funciones complejas y funciones de variable compleja	7
1.5. Problemas	9
2. Funciones holomorfas	13
2.1. Introducción y objetivos	13
2.2. Definiciones	14
2.3. Ecuaciones de Cauchy–Riemann	16
2.4. Aplicaciones conformes e interpretación geométrica	21
2.5. Problemas	23
3. Series de potencias	27
3.1. Introducción y objetivos	27
3.2. Convergencia y convergencia absoluta de series	27
3.3. Series de potencias y radio de convergencia	30
3.4. Cálculo del radio de convergencia	31
3.5. Derivación de series de potencias y teorema de Abel	33
3.6. Problemas	35
4. Funciones elementales	41
4.1. Introducción y objetivos	41
4.2. La función exponencial	42
4.3. Funciones trigonométricas	44
4.4. Períodos de una función compleja	44
4.5. Funciones hiperbólicas	45
4.6. La función logaritmo	45
4.7. Problemas	47

5. Integración compleja y teorema de Cauchy	53
5.1. Introducción y objetivos	53
5.2. Caminos y contornos	53
5.3. Integración en caminos	55
5.4. El lema de estimación	59
5.5. Índice de caminos y teorema de Cauchy	60
5.6. Problemas	64
6. Fórmula integral de Cauchy y teorema de Taylor	69
6.1. Introducción y objetivos	69
6.2. Fórmula integral de Cauchy	70
6.3. Series de Taylor	72
6.4. Aplicaciones de la fórmula integral de Cauchy	75
6.4.1. La fórmula integral de Cauchy para funciones no holomorfas	77
6.5. Problemas	78
7. Series de Laurent y singularidades	83
7.1. Introducción y objetivos	83
7.2. Series de Laurent	83
7.3. Singularidades	89
7.3.1. Singularidades evitables	90
7.3.2. Polos	91
7.3.3. Singularidades esenciales	92
7.4. Problemas	94
8. Teorema de los residuos	97
8.1. Introducción y objetivos	97
8.2. Ceros y polos de funciones holomorfas	97
8.3. El teorema de los residuos	100
8.4. Cálculo de residuos	102
8.5. Problemas	106
9. Aplicaciones del teorema de los residuos	111
9.1. Introducción y objetivos	111
9.2. Primeros ejemplos	111
9.3. Integrales reales impropias	113
9.3.1. Método general	116
9.4. Integrales trigonométricas	117
9.5. Suma de series	118
9.6. Problemas	122
10. Aplicaciones conformes y teorema de Riemann	125
10.1. Introducción y objetivos	125
10.2. Límite de funciones holomorfas	126
10.3. Densidad de los polinomios	127

10.4. Aplicaciones conformes	129
10.4.1. Ejemplos de aplicaciones conformes	131
10.5. Teorema de Riemann	133
10.6. Automorfismos de \mathbb{C} y el principio de reflexión	135
10.7. Problemas	137

Introducción

Esta asignatura está dedicada al estudio de las funciones holomorfas, que son el análogo a las funciones derivables del análisis real. La asignatura tiene dos grandes objetivos: en primer lugar, adquirir herramientas del análisis complejo y, en segundo lugar, usar el análisis complejo para resolver problemas en otras áreas de las matemáticas.

En primer lugar se presentará el plano complejo desde los puntos de vista algebraico y topológico. Una vez establecida esta base podremos extender la noción de derivabilidad al caso de funciones complejas de variable compleja.

En una segunda parte usaremos distintas técnicas para estudiar las funciones holomorfas. Una primera herramienta serán las series de potencias: veremos que las series de potencias son holomorfas y que toda función holomorfa admite un desarrollo en serie de potencias. La segunda herramienta será la teoría integral de Cauchy, que es incluso más potente que las series de potencias.

Aunque las funciones holomorfas son muy importantes, es frecuente encontrarse con funciones que presentan singularidades. En función del tipo de singularidad, los problemas pueden ser más o menos graves. Para estudiar las singularidades usaremos todas las herramientas introducidas hasta el momento, además de otras, como las series de Laurent o la teoría de residuos.

Para terminar la asignatura estudiaremos las aplicaciones conformes y demostraremos el teorema de Riemann, que establece que todo dominio simplemente conexo del plano complejo puede transformarse en un disco mediante una aplicación conforme.

A lo largo de la asignatura se irán indicando con mayor o menor nivel de profundidad las múltiples conexiones que tiene el análisis complejo con otros campos de las matemáticas. Algunas de estas conexiones serán con el álgebra, el análisis real, la topología o las ecuaciones en derivadas parciales, la teoría de números y los sistemas dinámicos.

Capítulo 1

El plano complejo

1.1. Introducción y objetivos

En este primer capítulo estudiaremos el plano complejo tanto desde el punto de vista algebraico como topológico. Empezaremos motivando la existencia de estos números y definiendo el cuerpo \mathbb{C} de los números complejos. También veremos que podemos pensar \mathbb{R} como un subcuerpo de \mathbb{C} .

Repasaremos las distintas formas de escribir los números complejos: binomial, polar, trigonométrica y exponencial. Veremos las ventajas de trabajar con los números complejos en forma exponencial, en particular en el cálculo de las raíces n -ésimas de un número complejo. Finalmente repasaremos algunas propiedades de las raíces de polinomios y presentaremos el teorema fundamental del álgebra. También veremos la primera de las dos demostraciones del teorema fundamental del álgebra que aparecerán en esta asignatura.

En una segunda sección veremos como las propiedades métricas y topológicas del plano euclídeo \mathbb{R}^2 pueden traducirse perfectamente al plano complejo \mathbb{C} . También definiremos distintos subconjuntos del plano complejo que serán importantes a lo largo de la asignatura. Esto permitirá poder traducir las nociones de continuidad, derivación e integración de funciones definidas en \mathbb{R}^2 a funciones complejas.

Más concretamente,

- definiremos el cuerpo de los números complejos como una extensión de \mathbb{R} ,
- veremos como operar con números complejos aprovechando las diferentes formas de escribirlos,
- repasaremos la topología del plano complejo traduciendo las nociones ya conocidas del plano euclídeo,
- introduciremos la noción de funciones complejas y definiremos el concepto de límite y continuidad para estas funciones.

1.2. El cuerpo de los números complejos

En esta primera sección recordaremos brevemente algunas de las propiedades algebraicas de los números complejos. Empezaremos con el origen de los números complejos. El propósito de los números complejos es proporcionar soluciones a ecuaciones polinómicas que no tienen solución real. Por ejemplo, las ecuaciones

$$x^2 + 1 = 0, \quad x^2 + 2x + 5 = 0$$

no tienen solución en el cuerpo \mathbb{R} de los números reales. Para resolver estas ecuaciones, introducimos el concepto de **unidad imaginaria**, que denotaremos por i , que cumple la relación

$$i^2 = -1.$$

Extendiendo los números reales con esta unidad imaginaria i , veremos que podemos resolver todas las ecuaciones polinómicas con coeficientes reales (y, de hecho, complejos).

Definición 1.2.1 (El plano complejo). *Llamaremos **plano complejo** o plano de Argand al conjunto*

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

de pares de números reales dotado de las operaciones

- *suma:* $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$,
- *producto:* $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Proposición 1.2.2. *El plano complejo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ con las operaciones de suma y producto es un cuerpo conmutativo. Es decir, satisface las siguientes propiedades:*

1. **Clausura:** *dados $a, b \in \mathbb{C}$, $a + b, ab \in \mathbb{C}$,*
2. **Asociatividad:** *dados $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a + (b + c) = (a + b) + c$, y $a(bc) = (ab)c$,*
3. **Conmutatividad:** *dados $a, b \in \mathbb{C}$, $a + b = b + a$, y $ab = ba$,*
4. **Distributividad:** *dados $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a(b + c) = ab + ac$,*
5. **Existencia de neutro para la suma:** *existe un complejo $0 \in \mathbb{C}$ tal que para todo $z \in \mathbb{C}$, $z + 0 = z$,*
6. **Existencia de neutro para el producto:** *existe un complejo $1 \in \mathbb{C}$ tal que para todo $z \in \mathbb{C}$, $1z = z$,*
7. **Existencia de opuesto para la suma:** *para todo $z \in \mathbb{C}$, existe $-z \in \mathbb{C}$ tal que $z + (-z) = 0$,*
8. **Existencia de inverso para el producto:** *para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, existe $z^{-1} \in \mathbb{C}$ tal que $zz^{-1} = 1$,*

Tal como hemos definido las operaciones entre números complejos podemos identificar el número real $a \in \mathbb{R}$ con el complejo $(a, 0) \in \mathbb{C}$ de forma que se respeten las operaciones. Mediante esta identificación $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ dada por $a \mapsto (a, 0)$, podemos entender los números reales como un subcuerpo de los números complejos.

Teniendo en cuenta esta identificación y el hecho de que

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0),$$

vemos que la unidad imaginaria i se corresponde con el complejo $(0, 1)$. De este modo, podemos escribir el complejo $z = (a, b)$ como $z = a + bi$. Esta forma de escribir los números complejos recibe el nombre de **forma binomial**.

Definición 1.2.3 (Parte real e imaginaria de un complejo). *Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$ un número complejo. Los números reales*

$$a = \Re(z), \quad b = \Im(z)$$

*que lo componen reciben el nombre de **parte real** y **parte imaginaria** de z respectivamente. Los números complejos con parte real nula se llaman **imaginarios puros**. Ya hemos visto que podemos identificar a los números reales con los complejos con parte imaginaria nula.*

A diferencia del cuerpo de los números reales, el cuerpo de los números complejos no es un cuerpo ordenado. Dicho de forma más precisa, no se puede definir un orden en \mathbb{C} que sea compatible con las operaciones del cuerpo.

Definición 1.2.4 (Conjugación). *El **conjugado** del número complejo $z = a + bi$ es el complejo $\bar{z} = a - bi$.*

Notamos que un número complejo z es real si y solo si $z = \bar{z}$. Por otro lado, z es imaginario puro si y solo si $\bar{z} = -z$. La conjugación satisface las siguientes propiedades:

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$,
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$,
- $\bar{\bar{z}} = z$,
- si $z = a + bi$, $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

Si z es un número complejo,

$$\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Definición 1.2.5 (Módulo). *El **módulo** o **valor absoluto** de un complejo z es el real positivo*

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}},$$

o, expresado en forma binomial,

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si z es un número real, el módulo no es más que el valor absoluto como número real. Si z es un número complejo, $|z|$ es la norma euclidiana de z visto como elemento de \mathbb{R}^2 . Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, el módulo $|z_1 - z_2|$ es la distancia euclídea entre los puntos z_1, z_2 del plano. El módulo satisface las siguientes propiedades:

- $|z| \geq 0$,
- $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$,
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (desigualdad triangular),
- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

La conjugación y el módulo permiten calcular fácilmente el inverso multiplicativo de cualquier complejo $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Recordamos que un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, diferente del origen de coordenadas, puede expresarse en **coordenadas polares** (r, θ) , de forma que

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

El cambio inverso viene dado por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}.$$

El ángulo θ está definido salvo la adición de un múltiplo entero de 2π . Es habitual imponer que θ pertenezca a un cierto intervalo prefijado, como $[0, 2\pi)$ o $(-\pi, \pi]$.

Definición 1.2.6 (Forma polar). *Mediante la identificación de \mathbb{C} con el plano \mathbb{R}^2 , podemos representar un complejo $z \neq 0$ con las coordenadas radial y angular (r, θ) . Esta representación recibe el nombre de **forma polar**. La primera coincide con el módulo de z . La segunda, salvo un múltiplo entero de 2π , recibe el nombre de **argumento** de z , $\arg z$. La **determinación principal**, o **argumento principal** de z , $\text{Arg } z$, es el argumento θ tal que $-\pi < \theta \leq \pi$.*

Definición 1.2.7 (Forma trigonométrica). *A partir de la forma polar, podemos escribir un complejo z como*

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta.$$

*Esta representación recibe el nombre de **forma trigonométrica**.*

Teorema 1.2.8 (Fórmula de Euler).

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

La fórmula de Euler es muy importante porque motiva la siguiente notación, que será de extrema utilidad a partir de ahora. En el siguiente vídeo se prueba la fórmula de Euler y la fórmula de De Moivre. También se da una primera aplicación: la obtención de las fórmulas del seno y el coseno de la suma y la resta, así como las fórmulas del seno y el coseno del ángulo múltiple.

Vídeo Fórmula de Euler y fórmula de De Moivre

Definición 1.2.9 (Forma exponencial). *En virtud de la fórmula de Euler, un complejo $z = r \cos \theta + ir \sin \theta$ puede escribirse como*

$$z = re^{i\theta}.$$

Notamos que un complejo de módulo 1 es de la forma $e^{i\theta}$. Geométricamente, la multiplicación $z \mapsto e^{i\theta}z$ es una rotación en el plano complejo de ángulo θ alrededor del origen.

La forma exponencial permite hacer algunos cálculos más fácilmente, especialmente los que involucran productos y cocientes:

- $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$,
- $r_1e^{i\theta_1} \cdot r_2e^{i\theta_2} = (r_1r_2)e^{i(\theta_1+\theta_2)}$,
- $(re^{i\theta})^{-1} = r^{-1}e^{-i\theta}$,
- para $n \in \mathbb{Z}$, $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$

Otra ventaja de la notación exponencial es que facilita enormemente el cálculo de las raíces n -ésimas.

Definición 1.2.10 (Raíces n -ésimas de un complejo). *Sea $z = re^{i\theta}$ un número complejo no nulo y $n \in \mathbb{N}^*$. Las **raíces n -ésimas** de z son los complejos $w = \rho e^{i\psi}$ tales que $w^n = z$. Por lo tanto,*

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\theta + 2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

*En particular, las **raíces n -ésimas de la unidad** son*

$$e^{\frac{2\pi ik}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Las raíces n -ésimas de un complejo z pueden obtenerse calculando una raíz n -ésima multiplicándola por las raíces de la unidad. Por lo tanto, las raíces n -ésimas de un complejo son los vértices de un polígono regular de n lados centrado en el origen.

Ejemplo 1.2.11 (Cálculo de las raíces n -ésimas de un complejo). *Vamos a calcular las raíces cúbicas del número complejo $z = -1 + i$. Si escribimos el complejo z en forma exponencial, tenemos*

$$z = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$

Por lo tanto, las raíces cúbicas son

$$\begin{aligned} k = 0: \quad z_0 &= \sqrt[3]{2}e^{\frac{\pi}{4}i}, \\ k = 1: \quad z_1 &= \sqrt[3]{2}e^{\frac{11\pi}{12}i}, \\ k = 2: \quad z_2 &= \sqrt[3]{2}e^{\frac{19\pi}{12}i}. \end{aligned}$$

Teorema 1.2.12 (Teorema fundamental del álgebra). *Todo polinomio de grado mayor o igual que 1 a coeficientes complejos tiene como mínimo una raíz compleja. Es decir, \mathbb{C} es un cuerpo algebraicamente cerrado.*

Este teorema es un corolario inmediato del Teorema de Liouville, que veremos más adelante. Sin embargo, existen demostraciones más elementales. El siguiente vídeo muestra una demostración que usa simples argumentos topológicos.

Vídeo Demostración topológica del teorema fundamental del álgebra

Proposición 1.2.13. *Si α es una raíz compleja de un polinomio a coeficientes reales $p(z)$, entonces $\bar{\alpha}$ también es raíz de $p(z)$.*

1.3. Topología del plano complejo

En esta sección repasaremos brevemente algunas de las principales propiedades métricas y topológicas del plano complejo.

Como conjunto, $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, y por lo tanto todas las nociones métricas y topológicas del plano euclídeo pueden traducirse al plano complejo. En particular, el módulo $|z|$ de un complejo no es más que la norma euclídea estándar de \mathbb{R}^2 . Por lo tanto, la distancia euclídea entre dos puntos z_1, z_2 del plano complejo es

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|.$$

Veamos a continuación algunos subconjuntos relevantes del plano complejo:

- *Rectas.* En particular, las rectas paralelas a los ejes $\Re(z) = a$, o $\Im(z) = b$.
- *Semiplanos* (abiertos o cerrados). En particular, $\Re(z) > a$, $\Im(z) > b$, etc.
- *Bandas:* regiones comprendidas entre dos rectas paralelas.
- *Discos* (abiertos o cerrados), también llamados bolas:

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z_0, z) < r\}, \quad \bar{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z_0, z) \leq r\}.$$

- *Circunferencias:*

$$S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z_0, z) = r\} = \partial D(z_0, r).$$

En particular, la circunferencia unidad $S_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

- *Coronas circulares* (abiertas o cerradas):

$$C(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < d(z_0, z) < r_2\}.$$

Recordamos que el concepto de bola es la que permite definir la noción de conjunto abierto, y por lo tanto todas las nociones topológicas (y similares) del plano: conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto, conexo, arcoconexo, simplemente conexo, etc. También permite definir conceptos como la convergencia de sucesiones y las aplicaciones continuas, entre otros.

Repasemos algunas de estas nociones. Sea $S \subset \mathbb{C}$ un subconjunto.

- S es **abierto** si todos sus puntos son interiores; es decir, cuando para cada $z \in S$ existen un $r > 0$ tal que $D(z, r) \subset S$.
- S es **cerrado** si su complementario, $\mathbb{C} \setminus S$, es abierto.
- S está **acotado** si está contenido en alguna bola.
- S es **compacto** si toda sucesión de elementos de S tiene una sucesión parcial convergente dentro de S . En el caso de subconjuntos del plano, S es compacto si es cerrado y acotado.
- S es **arcoconexo** si dos puntos cualesquiera de S se pueden unir mediante un camino en S . Recordamos que un camino es una aplicación continua $\gamma: I \rightarrow S$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo no degenerado.
- S es **simplemente conexo** si es arcoconexo y su grupo fundamental es trivial. Equivalentemente, S es simplemente conexo si es arcoconexo y todo camino cerrado en S es homótopo a un punto.
- D es un **dominio** de \mathbb{C} si es abierto y simplemente conexo.

Ejemplo 1.3.1. Consideremos la bola abierta $B = D(0, 1)$ de centro el origen y radio 1. Claramente B es abierto y no es cerrado. B está acotado pero no es compacto. Finalmente, B es arcoconexo y simplemente conexo.

Ejemplo 1.3.2. Consideremos ahora la corona cerrada $C = \bar{C}(0, 1, 3) = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 3\}$. Tenemos que C no es abierto pero sí que es cerrado. Claramente C está acotado ya que $D \subset D(0, 4)$ y además es compacto. Además, C es arcoconexo pero en este caso no es simplemente conexo, ya que el camino $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow C$ dado por $t \mapsto 2e^{it}$ no puede contraerse a un punto debido al agujero que hay en el centro de la corona.

1.4. Funciones complejas y funciones de variable compleja

Definición 1.4.1 (Función compleja). Sea A un conjunto. Una **función compleja** es una función $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ que toma valores complejos. Como $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$, toda función compleja puede escribirse de forma única como $f = u + iv$, donde $u, v: A \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones reales, llamadas respectivamente **parte real**, $u = \Re(f)$, y **parte imaginaria**, $v = \Im(f)$, de f .

Todas las operaciones entre números complejos se trasladan sin mayores complicaciones a las funciones complejas. Por ejemplo, si $f = u + iv$, se tiene que $\bar{f} = u - iv$. Entonces,

$$\begin{aligned} u &= \Re(f) = \frac{1}{2}(f + \bar{f}), \\ v &= \Im(f) = \frac{1}{2i}(f - \bar{f}), \\ |f|^2 &= f\bar{f} = u^2 + v^2. \end{aligned}$$

De la misma forma que las funciones reales, las funciones a valores complejos definidas en un conjunto forman un \mathbb{C} -espacio vectorial.

Definición 1.4.2 (Derivada e integral de una función compleja de variable real). *Consideremos una función compleja de variable real $f = u + iv: I \rightarrow \mathbb{C}$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo no degenerado. Si u y v son derivables, podemos definir la **derivada** de f como*

$$f' = u' + iv'.$$

Análogamente, podemos definir la **integral** de f en el intervalo I como

$$\int_I f(t)dt = \int_I u(t)dt + i \int_I v(t)dt,$$

siempre que las dos integrales del miembro derecho estén definidas.

Notamos que estas operaciones de derivación e integración siguen las mismas reglas que en el caso real. En particular, destacamos

- Si $F' = f$, $\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = F(t_1) - F(t_2)$ (regla de Barrow),
- $\left| \int_I f(t)dt \right| \leq \int_I |f(t)|dt$ (desigualdad triangular).

Definición 1.4.3 (Función de variable compleja). *Una **función de variable compleja** es una función $f: S \subset \mathbb{C} \rightarrow B$ definida en un subconjunto del plano complejo.*

El principal objeto de estudio de esta asignatura serán las **funciones complejas de variable compleja** $f: S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Para estas funciones los conceptos de límite y continuidad son los mismos que para funciones reales de dos variables. En particular, una función compleja de variable compleja es continua si y solo si lo son sus partes real e imaginaria.

En ocasiones, nos convendrá hablar de límites infinitos en el plano complejo. Si $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ es una función compleja, decimos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

si, para todo $N > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x)| > N$ para todo x tal que $d(x, a) < \delta$.

Al revés, dada una función de variable compleja $f: \mathbb{C} \rightarrow B$, decimos que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = b$$

cuando, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $M > 0$ tal que si $|z| > M$, entonces $d(f(z), b) < \varepsilon$.

Como caso especial, si $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, decimos que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$$

cuando, para todo $N > 0$ existe un $M > 0$ tal que si $|z| > M$, entonces $|f(z)| > N$.

Podemos dar una interpretación más geométrica a estos límites ampliando el plano complejo con un punto adicional en el infinito, $\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Este espacio, conocido con el nombre de **esfera de Riemann**, es isomorfo a la compactificación de Alexandroff del plano euclídeo, es decir, a la esfera S^2 . También puede verse como el espacio proyectivo $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Los límites mencionados previamente corresponden a acercarse al punto del infinito.

1.5. Problemas

1. Escribe en forma polar los siguientes complejos:

- $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$,
- $z_2 = -5 + 5i$,
- $z_3 = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i$,
- $z_4 = -3i$.

Solución:

- $z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$,
- $z_2 = 5\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$,
- $z_3 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}$,
- $z_4 = 3e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

2. Describe el conjunto de números complejos $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$\left| \frac{z-3}{z+3} \right| < 2.$$

Solución: El conjunto consiste en los puntos exteriores al disco de centro -5 y radio $R = 4$ (frontera incluida). Puede escribirse como $|z + 5| > 4$.

3. **(El producto complejo como aplicación lineal)** El cuerpo de los números complejos \mathbb{C} puede verse como un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión 2. Para cada número complejo $w \in \mathbb{C}$, definimos la aplicación $m_w: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $m_w(z) = wz$. Comprueba que la aplicación m_w es lineal y calcula la matriz de m_w en la base $\{1, i\}$.

Solución: Si $w = re^{i\theta}$, la matriz de la multiplicación por w en la base $\{1, i\}$ es

$$r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

que corresponde a la composición de la rotación de ángulo θ con la homotecia de razón r . En particular, es un endomorfismo que conserva la orientación, ya que tiene determinante $r^2 > 0$.

4. Comprueba la siguiente identidad trigonométrica:

$$\cos(5\theta) = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta$$

Indicación: Usa la fórmula de De Moivre demostrada en el primer vídeo del tema.

5. **Triángulos equiláteros**

Sean z_1, z_2, z_3 los vértices de un triángulo equilátero. Demuestra que se cumple la relación

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1.$$

6. **Definiciones alternativas de las funciones trigonométricas**

Demuestra que pueden redefinirse las funciones trigonométricas como

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Indicación: Usa la fórmula de Euler.

7. Encuentra todos los números complejos z tales que $z^5 = -32$.

Solución:

- $z_0 = 2(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}),$
- $z_1 = 2(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5}),$
- $z_2 = 2(\cos \frac{5\pi}{5} + i \sin \frac{5\pi}{5}),$
- $z_3 = 2(\cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5}),$
- $z_4 = 2(\cos \frac{9\pi}{5} + i \sin \frac{9\pi}{5}).$

8. Demuestra la proposición 1.2.13.

9. Encuentra las soluciones complejas de la ecuación $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$.
¿Significa esto que hay una contradicción con la Proposición 1.2.13?

Solución: Las soluciones de la ecuación polinómica son $z_1 = 2 - 3i$ y $z_2 = 1 + i$.
No supone una contradicción ya que en la Proposición 1.2.13 se habla de polinomios a coeficientes reales.

10. Demuestra, usando los resultados vistos en este tema, que todo polinomio de grado impar a coeficientes reales tiene al menos una raíz real.

Nota: Este resultado también puede probarse de forma muy sencilla usando el teorema de Bolzano.

Capítulo 2

Funciones holomorfas

2.1. Introducción y objetivos

El objetivo de este segundo capítulo es presentar el concepto de función holomorfa. Las funciones holomorfas son la contraparte compleja a las funciones reales derivables. En el caso complejo, veremos que la condición de holomorfía es mucho más fuerte que la de derivabilidad real, cosa que añade mucha rigidez a las funciones holomorfas, como veremos en los siguientes capítulos.

Una de las caracterizaciones más importantes de las funciones holomorfas viene dada por las ecuaciones de Cauchy–Riemann, un sistema de ecuaciones en derivadas parciales. Definiremos estas ecuaciones y veremos como usarlas para comprobar rápidamente si una función es holomorfa en un punto.

Mediante las ecuaciones de Cauchy–Riemann, estableceremos la relación entre las funciones holomorfas y las funciones armónicas (aquellas funciones que son anuladas por el operador Laplaciano $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$).

También veremos la relación que existe entre las aplicaciones conformes, es decir, aquellas que preservan ángulos, y las funciones holomorfas.

Más concretamente, los objetivos que trataremos de alcanzar en este tema son los siguientes:

- Definir la noción de función holomorfa.
- Comparar las nociones de diferenciabilidad en \mathbb{C} y en \mathbb{R}^2 .
- Probar que una función es holomorfa si y solo si satisface las ecuaciones de Cauchy–Riemann.
- Demostrar que las funciones componentes de una función holomorfa son armónicas.
- Establecer la relación entre las funciones holomorfas y las aplicaciones conformes.
- Aplicar todo lo aprendido a distintos ejemplos.

2.2. Definiciones

Sea Ω un abierto de \mathbb{C} . Queremos estudiar las propiedades de las funciones definidas de forma natural en Ω . Una primera clase de funciones que podemos considerar es la de las funciones diferenciables en Ω . Esto tiene el problema de que no usamos la estructura de cuerpo de \mathbb{C} , nos limitamos a considerar Ω como un abierto de \mathbb{R}^2 . Otra posibilidad es intentar redefinir la condición de diferenciabilidad de una función teniendo en cuenta que estamos en el plano complejo \mathbb{C} . Esto es lo que haremos a continuación.

Definición 2.2.1 (Función holomorfa). *Decimos que una función $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es **holomorfa** en un punto $a \in \Omega$ si existe el límite*

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

*En este caso, denotamos el valor del límite como $f'(a)$. Decimos que f es **holomorfa** en Ω si f es holomorfa en todo punto de Ω . En este caso decimos que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Diremos que una función f es **entera** si es holomorfa en todo el plano complejo, i.e. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.*

Si $K \subset \mathbb{C}$ es un compacto y $f: K \rightarrow \mathbb{C}$, decimos que f es holomorfa en K ($f \in \mathcal{H}(K)$) si existe un abierto Ω que contenga K tal que f se puede extender a una función holomorfa en Ω .

Proposición 2.2.2. *Sea $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en un punto $a \in \Omega$. Entonces f es continua en a .*

Demostración. Consideremos la función

$$\psi(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Entonces podemos escribir

$$f(z) = f(a) + \psi(z)(z - a).$$

Notemos que la función f es holomorfa en a si y solo si la función ψ tiene límite en a . En este caso, la función f tiene límite en a igual a $f(a) + f'(a)(a - a) = f(a)$ y por lo tanto es continua en ese punto. \square

Notamos que si f es holomorfa en un punto $a \in \Omega$, entonces existen sus derivadas parciales. De hecho esta condición es mucho más estricta que la existencia de derivadas parciales, ya que el límite se toma cuando z se acerca a a en todas las direcciones posibles y, además, en la definición está implícita una cierta relación entre las derivadas parciales de la parte real y la parte imaginaria que estudiaremos detalladamente. De hecho, como veremos más adelante, una función holomorfa en un abierto será automáticamente de clase \mathcal{C}^∞ en ese abierto.

Proposición 2.2.3. *La suma, producto, cociente y composición de funciones holomorfas son holomorfas y sus derivadas vienen dadas por las fórmulas habituales:*

- $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z),$
- $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2},$ siempre que $g(z) \neq 0,$
- $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z).$

A continuación veremos algunos ejemplos de funciones holomorfas y calcularemos sus derivadas complejas.

Ejemplo 2.2.4 (Polinomios). *Las funciones holomorfas por excelencia son los polinomios*

$$p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n.$$

Es fácil ver que la derivada del polinomio p es

$$p'(z) = a_1 + 2a_2z + \cdots + na_nz^{n-1}.$$

Ejemplo 2.2.5. *Veamos que la función $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \sin z$ es holomorfa en todo el plano complejo y calculemos su derivada. Considerando el límite*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(z+h) - \sin z}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin z(\cos h - 1) + \cos z \sin h}{h} = \cos z,$$

donde hemos usado las fórmulas de adición y el hecho de que las funciones

$$\frac{\cos h - 1}{h} \quad \text{y} \quad \frac{\sin h}{h}$$

son continuas en el origen con límite 0 y 1 respectivamente, vemos que la función $f(z) = \sin z$ es holomorfa en \mathbb{C} y su derivada es $f'(z) = \cos z$. Este resultado coincide con lo que ya sabemos sobre la función seno definida en la recta real.

En cambio, otras muchas funciones sencillas no son holomorfas, como ilustran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.2.6 (Conjugación). *Veremos que la función compleja $f(z) = \bar{z}$ no es holomorfa en ningún punto del plano complejo. Calculando el límite*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{z_0 + h} - \bar{z}_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

vemos que no existe. Efectivamente, si hacemos tender h a 0 sobre el eje real, pongamos $h = t \in \mathbb{R}$, el límite anterior tiene valor 1. Por otro lado, si h es imaginario puro, pongamos $h = it$ con $t \in \mathbb{R}$, el límite anterior tiene valor -1. En conclusión el límite no existe y la función $f(z) = \bar{z}$ no es holomorfa en ningún punto.

Por lo tanto, hemos encontrado una función continua en todo el plano complejo que no tiene derivada compleja en ningún punto. También existen funciones así en el análisis real, aunque son mucho más complicadas. El ejemplo más sencillo es la función M de Weierstrass, cuya expresión es $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} \cos(2\pi b^n x)$, donde $\alpha \in (0, 1)$ y $b \geq 2$.

Ejemplo 2.2.7 (Cuadrado del valor absoluto). Consideremos la función $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = |z|^2 = z\bar{z}.$$

A continuación veremos que esta función solo es holomorfa en $z_0 = 0$. Consideremos el límite

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z_0 + h)\overline{(z_0 + h)} - z_0\bar{z}_0}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\Re(z_0\bar{h}) + h\bar{h}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\Re(z_0\bar{h})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax + by}{x + iy}, \end{aligned}$$

donde $h = x + iy$ y $2z_0 = a + ib$. Notamos que este límite solo existe cuando $(a, b) = (0, 0)$. En este caso el límite existe y vale 0. En otro caso el límite sobre la recta real y la recta imaginaria tiene valor a y $-ib$ respectivamente. Por lo tanto la función $f(z) = |z|^2$ solo es holomorfa en $z_0 = 0$.

2.3. Ecuaciones de Cauchy–Riemann

A continuación veremos como la condición de holomorfa vincula las derivadas direccionales.

Proposición 2.3.1. Sea $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa y sean $u(x, y) = \Re f(x + iy)$ y $v(x, y) = \Im f(x + iy)$, con $x + iy \in \Omega$. Entonces se satisfacen las **ecuaciones de Cauchy–Riemann**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Demostración. Evaluaremos el límite

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}$$

de dos formas diferentes. Primero, haciendo tender $h \rightarrow 0$ con valores reales de h . En este caso tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h + iy) - f(x + iy)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{u(x + h, y) - u(x, y)}{h} + i \frac{v(x + h, y) - v(x, y)}{h} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y). \end{aligned}$$

Por otro lado, tomando h imaginario puro, es decir $h = ik$ con $k \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(z + ik) - f(z)}{ik} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + ik + iy) - f(x + iy)}{ik} \\ &= -i \frac{u(x, y + k) - u(x, y)}{k} + \frac{v(x, y + k) - v(x, y)}{k} \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y). \end{aligned}$$

Ahora, igualando las partes real e imaginaria de los dos resultados obtenidos, encontramos las ecuaciones de Cauchy–Riemann. \square

Si hacemos el cambio de variable $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Estos operadores $\partial/\partial z$ y $\partial/\partial \bar{z}$ reciben el nombre de **operadores de Wirtinger**.

Por tanto, las ecuaciones de Cauchy–Riemann se traducen en

$$f'(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a) \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0.$$

Proposición 2.3.2. *Sea $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ y escribimos $f = u + iv$, donde $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces las ecuaciones siguientes son equivalentes (todas ellas reciben el nombre de ecuaciones de Cauchy–Riemann):*

- $\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$,
- $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$,
- $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$,
- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}$.

Supongamos ahora que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y además que $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ (esta última hipótesis es superflua ya que más adelante veremos que toda función holomorfa es de clase \mathcal{C}^∞).

Corolario 2.3.3. *Sea $f = u + iv: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Entonces u, v son funciones armónicas, es decir, $\Delta u = \Delta v = 0$.*

Demostración. Efectivamente, si calculamos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Análogamente para v . \square

Ejemplo 2.3.4. *En este ejemplo vamos a*

- *demostrar que la función $u(x, y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$ es armónica.*
- *encontrar una **conjugada armónica** de la función u , es decir una función $v(x, y)$ tal que $f(z) = u(z) + iv(z)$ sea holomorfa.*

Veamos como proceder:

- *Calculemos las derivadas parciales de u :*

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= e^{-x} \sin y - xe^{-x} \sin y + ye^{-x} \cos y, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -2e^{-x} \sin y + xe^{-x} \sin y - ye^{-x} \cos y, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= xe^{-x} \cos y + ye^{-x} \sin y - e^{-x} \cos y \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -xe^{-x} \sin y + 2e^{-x} \sin y + ye^{-x} \cos y.\end{aligned}$$

Sumando las derivadas segundas de u , tenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

y por lo tanto u es armónica.

- *A partir de las ecuaciones de Cauchy–Riemann, tenemos*

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^{-x} \sin y - xe^{-x} \sin y + ye^{-x} \cos y, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-x} \cos y - xe^{-x} \cos y - ye^{-x} \sin y. \quad (2.2)$$

Integramos (2.1) respecto a y , manteniendo x constante. Entonces,

$$\begin{aligned}v &= -e^{-x} \cos y + xe^{-x} \cos y + e^{-x}(y \sin y + \cos y) + F(x) \\ &= ye^{-x} \sin y + xe^{-x} \cos y + F(x),\end{aligned} \quad (2.3)$$

donde $F(x)$ es una función real arbitraria. Sustituyendo (2.3) en (2.2), obtenemos

$$\begin{aligned}-ye^{-x} \sin y - xe^{-x} \cos y + e^{-x} \cos y + F'(x) &= \\ &= e^{-x} \cos y - xe^{-x} \cos y - ye^{-x} \sin y,\end{aligned}$$

de donde deducimos que $F'(x) = 0$ y por lo tanto $F(x) = c$ una función constante. Por lo tanto,

$$v(x, y) = ye^{-x} \sin y + xe^{-x} \cos y + c.$$

Las ecuaciones de Cauchy–Riemann son muy importantes ya que caracterizan las funciones holomorfas, como prueba la siguiente proposición.

Proposición 2.3.5. *Sea $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ una función con valores complejos. Si f satisface las ecuaciones de Cauchy–Riemann en Ω , es decir,*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y},$$

entonces f es holomorfa en Ω .

Demostración. Sea $z - a = \xi + i\eta$, con $\xi, \eta \in \mathbb{R}$. Entonces, por el teorema de Taylor, como u es de clase \mathcal{C}^1 ,

$$u(z) - u(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a)\xi + \frac{\partial u}{\partial y}(a)\eta + o(|z - a|).$$

Por otro lado,

$$v(z) - v(a) = \frac{\partial v}{\partial x}(a)\xi + \frac{\partial v}{\partial y}(a)\eta + o(|z - a|).$$

Multiplicando la segunda por i y sumándolas, obtenemos

$$\begin{aligned} f(z) - f(a) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a)\xi + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\eta + o(|z - a|) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a)(\xi + i\eta) + o(|z - a|), \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{\partial f}{\partial x}(a).$$

□

Es importante resaltar que la condición de ser de clase \mathcal{C}^1 no es en absoluto superflua, ya que por ejemplo la función

$$f(x + iy) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy = 0, \\ 1, & \text{si } xy \neq 0, \end{cases}$$

tiene derivadas parciales en el origen y satisface las ecuaciones de Cauchy–Riemann pero sin embargo no es holomorfa en el origen, ya que ni siquiera es continua.

A continuación veremos algunos ejemplos de cómo usar las ecuaciones de Cauchy–Riemann para demostrar que una función es o no es holomorfa.

Ejemplo 2.3.6. *En este ejemplo vamos a usar las ecuaciones de Cauchy–Riemann para probar que las funciones $z \mapsto \Re(z)$ y $z \mapsto \Im(z)$ no son holomorfas en ningún punto del plano complejo.*

En primer lugar, la función $\Re(z)$ tiene funciones componentes $u(x + iy) = x$ y $v(x + iy) = 0$. En este caso,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = 1 \neq 0 = \frac{\partial v}{\partial y}(z),$$

y por lo tanto la función $\Re(z)$ no es holomorfa en ningún punto.

Por otro lado, la función $\Im(z)$ tiene funciones componentes $u(x + iy) = y$ y $v(x + iy) = 0$. En este caso,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(y) = 0 \neq 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}(z),$$

y por lo tanto la función $\Im(z)$ no es holomorfa en ningún punto.

Ejemplo 2.3.7. Veamos que la función $f(z) = |z|$ no es holomorfa en ningún punto. Podemos escribir la función como

$$f(x + iy) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Sus funciones componentes son

$$u(x + iy) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v(x + iy) = 0.$$

En $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existen derivadas parciales y tenemos que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z), \end{cases}$$

si y solo si

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

cosa que no ocurre nunca. Por otro lado, en el punto $z = 0$ no tenemos ni siquiera derivadas parciales.

Ejemplo 2.3.8. En este ejemplo usaremos los operadores de Wirtinger para demostrar que la función $f(z) = z^2$ es holomorfa en todo el plano complejo y calcularemos su derivada compleja.

En primer lugar,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z^2) &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(x^2 - y^2 + 2xyi) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (x^2 - y^2) + i \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (2xy) \\ &= \frac{1}{2}(2x - 2iy) + i \frac{1}{2}(2y + 2ix) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función $f(z) = z^2$ es holomorfa. Calculemos ahora su derivada compleja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(z^2) &= \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - y^2 + 2ixy) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (x^2 - y^2) + i \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (2xy) \\ &= \frac{1}{2}(2x + 2iy) + i \frac{1}{2}(2y - 2ix) \\ &= 2(x + iy) = 2z. \end{aligned}$$

En el siguiente vídeo se estudian detalladamente con un mismo ejemplo tres formas diferentes de comprobar si una función es holomorfa y de calcular su derivada compleja.

Vídeo Distintos métodos para estudiar la holomorfía de una función compleja

Dada una función real derivable $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un intervalo I , es bien sabido que f es constante si, y solo si, $f' \equiv 0$. En el caso complejo, existen varias caracterizaciones de las funciones holomorfas. En el siguiente vídeo se presentan y demuestran las más importantes.

Vídeo Caracterización de las funciones holomorfas constantes

2.4. Aplicaciones conformes e interpretación geométrica

Veamos ahora una interpretación geométrica de la condición de holomorfía. Si f es una función holomorfa de Ω en \mathbb{C} , veremos como distorsiona las figuras que tengamos en Ω . Si tomamos una curva γ con ecuación $z = z(t)$, con $t \in [0, 1]$, contenida en Ω , entonces la ecuación $w(t) = f(z(t))$ define una curva $\tilde{\gamma}$ en $f(\Omega)$ que es la imagen de γ por f .

Si $z'(t)$ existe entonces también existe $w'(t)$ y viene dado por $w'(t) = f'(z(t))z'(t)$. Vamos a fijarnos en qué quiere decir esto en un punto t_0 donde $z'(t_0) \neq 0$ y $f'(z(t_0)) \neq 0$. Sean $z_0 = z(t_0)$ y $w_0 = f(z_0)$. En el punto w_0 , $\tilde{\gamma}$ tiene tangente ya que $w'(t_0) \neq 0$. Además, la dirección está determinada por

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0).$$

Es decir, el ángulo de la tangente se incrementa en $\arg f'(z_0)$, independientemente de la curva γ original. Por lo tanto, si tenemos dos curvas que se cortan en z_0 con un cierto ángulo, sus imágenes se cortan en w_0 con el mismo ángulo (y preservando la orientación). A las aplicaciones que cumplen esta propiedad se las conoce como **aplicaciones conformes**. Veamos que el recíproco también se cumple.

Proposición 2.4.1. *Sea $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ una aplicación conforme. Entonces f es holomorfa.*

Demostración. Sea $z(t) = x(t) + iy(t)$ un camino en Ω . La derivada de $w(t) = f(z(t))$ se puede escribir como

$$w'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)y'(t_0).$$

En términos de $z'(t_0)$, tenemos

$$\begin{aligned} w'(t_0) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \right) z'(t_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \right) \overline{z'(t_0)} \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) z'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \overline{z'(t_0)}. \end{aligned}$$

Por otra parte, si los ángulos se conservan, $\arg(w'(t_0)/z'(t_0))$ tiene que ser independiente de $\arg z'(t_0)$. Es decir,

$$\arg \left(\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \frac{\overline{z'(t_0)}}{z'(t_0)} \right)$$

tiene que ser independiente de $\arg z'(t_0)$. Esto solo ocurre cuando $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ (las ecuaciones de Cauchy–Riemann) que, como ya hemos visto, son equivalentes a la holomorfía. \square

A continuación veremos otra interpretación geométrica que tiene la ventaja de permitir generalizaciones a variedades diferenciables complejas. Identificamos \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 de la siguiente forma: $\mu(z) = \mu(x + iy) = (x, y)$. Si $f = u + iv$, dado $a \in \Omega$, definimos la aplicación \mathbb{R} -lineal $d_a(u, v): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como

$$d_a(u, v)(\zeta, \eta) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(a)\zeta + \frac{\partial u}{\partial y}(a)\eta, \frac{\partial v}{\partial x}(a)\zeta + \frac{\partial v}{\partial y}(a)\eta \right).$$

Esta aplicación es la aplicación diferencial tangente en el punto a de la aplicación (u, v) . Podemos definir la aplicación $d_a f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, \mathbb{R} -lineal, de la forma $d_a f = \mu^{-1} \circ d_a(u, v) \circ \mu$. Es decir, la definimos de manera que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{d_a f} & \mathbb{C} \\ \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{d_a(u, v)} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Entonces, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.4.2. *La aplicación $d_a f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es \mathbb{C} -lineal (i.e., $d_a f(\lambda\zeta) = \lambda d_a f(\zeta)$) para todo $\lambda, \zeta \in \mathbb{C}$) si, y solo si, f es holomorfa en a . En este caso tenemos*

$$d_a f(\zeta) = \frac{\partial f}{\partial z}(a)\zeta.$$

Demostración. La aplicación diferencial $d_a(u, v)(a)$ viene dada por una matriz 2×2 :

$$L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Veamos qué necesitamos para que esta aplicación L sea \mathbb{C} -lineal. Solo necesitamos imponer la condición

$$L(iz) = iL(z).$$

Es decir, para todo (ζ, η) , debe cumplirse que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C\zeta - D\eta \\ A\zeta + B\eta \end{pmatrix}.$$

La condición es equivalente a $A = D$ y $B = -C$, que en el caso de la aplicación lineal $L = d_a(u, v)$ son exactamente las ecuaciones de Cauchy–Riemann. Además, en este caso la aplicación lineal tiene la forma

$$L(\zeta + i\eta) = (A + iB)(\zeta + i\eta).$$

Si se cumplen las ecuaciones de Cauchy–Riemann, $(A + iB)$ se corresponde con $f'(a)$. \square

Esta caracterización permite demostrar de forma alternativa que la composición de funciones holomorfas es holomorfa, pues la aplicación diferencial de la composición es la composición de las aplicaciones diferenciales y la composición de aplicaciones \mathbb{C} -lineales es trivialmente \mathbb{C} -lineal. Además, se cumple la regla de la cadena

$$(f(g(z)))' = f'(g(z))g'(z).$$

2.5. Problemas

1. Demuestra, a partir de la definición de función holomorfa, que la función $f(x + iy) = y + ix$ no es holomorfa en ningún punto.
2. Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la función definida por

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

Determina en qué puntos del plano tangente es f holomorfa y encuentra su derivada.

Solución.

Método 1: usando la definición de función holomorfa . Calculando el límite

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1+(z+h)}{1-(z+h)} - \frac{1+z}{1-z}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{(1-z-h)(1-z)} \\ &= \frac{2}{(1-z)^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto f es holomorfa en todo el plano complejo excepto en $z = 1$ y su derivada es $f'(z) = \frac{2}{(1-z)^2}$.

Método 2: usando las reglas de derivación

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{(1-z)(1+z)' - (1+z)(1-z)'}{(1-z)^2} \\ &= \frac{(1-z) + (1+z)}{(1-z)^2} \\ &= \frac{2}{(1-z)^2}, \end{aligned}$$

y por lo tanto la función f es holomorfa en todo \mathbb{C} salvo en $z = 1$ y la derivada coincide con la encontrada con el primer método.

3. Demuestra, a partir de la definición de función holomorfa, que la función $f(x+iy) = 4x - 2iy$ no es holomorfa en ningún punto.
4. Comprueba, usando la definición de función holomorfa, que la función $f(z) = \cos z$ es holomorfa en todo el plano complejo y que su derivada es $f'(z) = -\sin z$.

Indicación. Sigue el método propuesto en el ejemplo 2.

5. Demuestra, usando las ecuaciones de Cauchy–Riemann, que la conjugación compleja no es holomorfa en ningún punto.
6. Sea f una función holomorfa en un dominio D tal que existen dos constantes, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, no ambas nulas, tales que $c_1 f(z) + c_2 \overline{f(z)} = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Demuestra que f es constante.
7. Demuestra que el operador Laplaciano

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

puede escribirse, usando los operadores de Wirtinger, como

$$\Delta = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

8. Considera la función $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \sqrt{xy}$, donde $z = x + iy$. Demuestra que f satisface las ecuaciones de Cauchy–Riemann pero que su derivada compleja en el origen no existe. ¿Supone esto una contradicción?
9. Demuestra que la función $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ es armónica en todo el plano complejo y encuentra una conjugada armónica v , es decir, una función $v(x, y)$ tal que $f(z) = u(z) + iv(z)$ sea holomorfa.
10. Sea $u(x, y)$ una función armónica. ¿También es armónica la función u^2 ? Da las condiciones para que $f \circ u$ sea armónica.

Capítulo 3

Series de potencias

3.1. Introducción y objetivos

El principal objeto de estudio de este capítulo serán las series de potencias. Las series de potencias son de gran importancia en el análisis complejo, ya que como veremos en este capítulo toda serie de potencias es holomorfa en su región de convergencia. Más aún, como veremos en capítulos posteriores, toda función holomorfa puede escribirse como serie de potencias. Por lo tanto, el estudio de las funciones holomorfas puede reducirse al estudio de las series de potencias.

En primer lugar hablaremos de series de números complejos. Introduciremos las nociones de convergencia y convergencia absoluta de series numéricas y veremos su relación. También veremos algunos criterios para discernir si una serie es convergente, absolutamente convergente o divergente.

En segundo lugar introduciremos las series de potencias y definiremos su región de convergencia. Probaremos que las series de potencias pueden ser convergentes en un disco de radio R (llamaremos a R el radio de convergencia de la serie de potencias), en un único punto ($R = 0$) o en todo el plano complejo ($R = \infty$).

Finalmente enunciaremos y probaremos el teorema de Abel. Este teorema nos asegura que podemos derivar una serie de potencias término a término y que la serie derivada tiene el mismo radio de convergencia de la serie original. Esto implica que las series de potencias (y por lo tanto las funciones holomorfas) son infinitamente derivables en el sentido complejo visto en el tema anterior.

3.2. Convergencia y convergencia absoluta de series

En esta primera sección introduciremos las nociones de convergencia y convergencia absoluta de series de números complejos y veremos que relación hay entre ellas.

Definición 3.2.1 (Convergencia de sucesiones). *Sea s_n una sucesión de números complejos. Decimos que s_n **converge** a $s \in \mathbb{C}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal*

que $|s_n - s| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. En caso contrario diremos que s_n es **divergente**.

Definición 3.2.2 (Convergencia de series). Sea z_k una sucesión en \mathbb{C} . Decimos que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k$$

es **convergente** si la sucesión $s_n = \sum_{k=0}^n z_k$ converge. Llamamos al límite de esta sucesión s_n la **suma** de la serie. Si una serie no converge, diremos que es **divergente**.

Proposición 3.2.3. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge si, y solo si, tanto $\sum_{n=0}^{\infty} \Re(z_n)$ como $\sum_{n=0}^{\infty} \Im(z_n)$ convergen.

Demostración. Sea z_n una sucesión de números complejos. Consideremos las siguientes sucesiones

$$s_n = \sum_{k=0}^n z_k, \quad x_n = \sum_{k=0}^n \Re(z_k), \quad y_n = \sum_{k=0}^n \Im(z_k).$$

En primer lugar, supongamos que $\sum_{n \geq 0} z_n$ es convergente con suma s . Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ tenemos $|s - s_n| < \varepsilon$. Como para todo complejo $z \in \mathbb{C}$ sabemos que $|\Re(z)|, |\Im(z)| < |z|$, entonces tenemos que

$$|\Re(s) - x_n| \leq |s - s_n| < \varepsilon,$$

y que

$$|\Im(s) - y_n| \leq |s - s_n| < \varepsilon,$$

para todo $n \geq N$. Por lo tanto, las series $\sum_{n \geq 0} \Re(z_n)$ y $\sum_{n \geq 0} \Im(z_n)$ son convergentes con límite $\Re(s)$ y $\Im(s)$ respectivamente.

Recíprocamente, supongamos que las series $\sum_{n \geq 0} \Re(z_n)$ y $\sum_{n \geq 0} \Im(z_n)$ convergen a x e y respectivamente. Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_1$ tenemos que $|x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tomemos $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_2$ tenemos que $|y - y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$. Entonces, para todo $n \geq N$, tenemos

$$|s - s_n| \leq |x - x_n| + |y - y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

En consecuencia, la serie $\sum_{n \geq 0} z_n$ es convergente. \square

Sin embargo, a menudo necesitaremos una noción más fuerte de convergencia.

Definición 3.2.4 (Convergencia absoluta). Decimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es **absolutamente convergente** si la serie de números reales $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ converge.

La siguiente proposición establece la relación que hay entre las dos nociones de convergencia que hemos definido.

Proposición 3.2.5. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente, entonces es convergente.

Definición 3.2.6. Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente. Sea $z_n = x_n + iy_n$. Entonces, $|x_n|, |y_n| \leq |z_n|$. Por lo tanto, por el criterio de comparación, las series reales $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ son absolutamente convergentes. Como x_n, y_n son reales, sabemos que

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} x_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|, \quad \left| \sum_{n=0}^{\infty} y_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|,$$

de modo que tanto $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ como $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ convergen. Ahora, por la proposición anterior, $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge.

Ejemplo 3.2.7 (Una serie convergente pero no absolutamente convergente). Es fácil probar que la serie

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n}$$

es convergente. Sin embargo, la serie

$$\sum_{n \geq 0} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n}$$

diverge. De modo que tenemos un ejemplo de serie convergente pero no absolutamente convergente.

La razón principal para trabajar con series absolutamente convergentes es que se comportan bien al multiplicarlas entre ellas. Las series absolutamente convergentes pueden multiplicarse como si se trataran de sumas finitas, como muestra la siguiente proposición.

Proposición 3.2.8 (Producto de series absolutamente convergentes). Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dos series absolutamente convergentes. Entonces,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

donde $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$. Además, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ también es absolutamente convergente.

A continuación veremos dos criterios muy útiles para demostrar que una serie es absolutamente convergente.

Proposición 3.2.9 (Criterio del cociente). Sea z_n una sucesión de números complejos tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \ell.$$

Entonces, si $\ell < 1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente. Si $\ell > 1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es divergente.

Proposición 3.2.10 (Criterio de la raíz). *Sea z_n una sucesión de números complejos tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \ell.$$

Entonces, si $\ell < 1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente. Si $\ell > 1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es divergente.

Si $\ell = 1$ en cualquiera de las dos proposiciones anteriores, no podemos asegurar nada: la serie podría ser absolutamente convergente, convergente o divergente.

3.3. Series de potencias y radio de convergencia

Definición 3.3.1 (Serie de potencias). *Una **serie de potencias** en $z_0 \in \mathbb{C}$ es una serie de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

donde $a_n, z \in \mathbb{C}$

Mediante el cambio de variable $\zeta = z - z_0$ solo necesitamos considerar series de potencias en el origen, es decir, de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Ahora nos preguntaremos cuando converge una serie de potencias.

Definición 3.3.2 (Radio de convergencia). *Sea $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ una serie de potencias. El **radio de convergencia** de la serie es*

$$R = \sup \left\{ r \geq 0 \mid \text{existe } z \in \mathbb{C}, |z| = r, \text{ tal que } \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ converge} \right\},$$

donde pondremos $R = \infty$ si el supremo no existe. Llamaremos al conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$$

el **disco de convergencia** de la serie.

El siguiente teorema motiva el nombre de R en la definición anterior.

Teorema 3.3.3. *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias y sea R como acabamos de definir. Entonces,*

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolutamente para $|z| < R$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge para $|z| > R$.

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < R$ y tomamos z_1 , $|z| < |z_1| \leq R$, tal que la serie $\sum_{n \geq 0} a_n z_1^n$ converja. Como $\sum_{n \geq 0} a_n z_1^n$ converge, tenemos que $a_n z_1^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto, $|a_n z_1^n| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. En consecuencia, la sucesión $|a_n z_1^n|$ está acotada, es decir, existe $K > 0$ tal que $|a_n z_1^n| < K$ para toda n . Sea $q = |z|/|z_1|$. Como $|z| < |z_1|$, tenemos que $q < 1$. Por lo tanto,

$$|a_n z^n| = |a_n z_1^n| \left| \frac{z}{z_1} \right|^n < K q^n.$$

Por lo tanto, por el criterio de comparación, $\sum_{n \geq 0} |a_n z^n|$ converge, ya que sabemos que $\sum_{n \geq 0} K q^n = K/(1 - q)$. Entonces, la serie $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolutamente y por lo tanto es convergente.

Supongamos ahora que $\sum_{n \geq 0} a_n z_2^n$ es divergente. Si $|z_2| < |z|$ y $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ es convergente, por el argumento anterior $\sum_{n \geq 0} a_n z_2^n$ debe ser convergente, lo que representa una contradicción. Por lo tanto $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ es divergente.

Además, hemos visto que R debe existir. \square

En el caso $|z| = R$, el teorema anterior no puede asegurar el carácter de la serie.

3.4. Cálculo del radio de convergencia

La siguiente proposición nos da algunas herramientas para calcular el radio de convergencia de una serie de potencias.

Proposición 3.4.1. *Sea $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ una serie de potencias.*

1. *Si existe el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|/|a_n|$, entonces*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

2. *Si existe el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$, entonces*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Interpretaremos que $1/0$ es ∞ y que $1/\infty$ es 0 .

Demostración. Comencemos probando la primera afirmación. Supongamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell.$$

Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \ell |z|.$$

Usando el criterio del cociente, vemos que la serie de potencias $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge cuando $\ell|z| < 1$ y diverge cuando $\ell|z| > 1$. Por lo tanto, el radio de convergencia es $R = \frac{1}{\ell}$.

A continuación demostraremos la segunda afirmación. Supongamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell.$$

Tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} |z| = \ell|z|.$$

Por el criterio de la raíz, tenemos que la serie de potencias $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge para $\ell|z| < 1$ y diverge para $\ell|z| > 1$. Por lo tanto, el radio de convergencia de la serie de potencias es $R = \frac{1}{\ell}$. \square

Puede probarse que si el primer límite de la proposición anterior existe, entonces el segundo también y tienen el mismo valor. Sin embargo, hay ejemplos en los que existe el segundo pero el primero no.

A continuación veremos un par de ejemplos de cómo usar la proposición anterior para calcular el radio de convergencia de una serie de potencias.

Ejemplo 3.4.2. *Consideremos la serie de potencias*

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n}.$$

En este caso, tenemos que $a_n = \frac{1}{n}$. Por lo tanto,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 = \frac{1}{R}.$$

En consecuencia, el radio de convergencia de la serie es $R = 1$.

Ejemplo 3.4.3. *Consideremos ahora la serie de potencias*

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{2^n}.$$

Ahora tenemos que $a_n = \frac{1}{2^n}$. En este caso, podemos calcular el radio de convergencia como

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

tenemos que el radio de convergencia es $R = 2$. También podríamos haber calculado el radio de convergencia usando el punto 2 de la proposición anterior. En este caso,

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}.$$

De nuevo, el radio de convergencia es $R = 2$.

En algunas ocasiones la proposición anterior no nos servirá, ya que no existirán ninguno de los dos límites requeridos. Sin embargo, hay una fórmula que sirve para calcular el radio de convergencia de cualquier serie de potencias $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$:

$$\frac{1}{R} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Una de las primeras series de potencias que nos encontramos estudiando matemáticas es la serie geométrica. En el siguiente vídeo se estudia esta serie en detalle

Vídeo La serie geométrica

3.5. Derivación de series de potencias y teorema de Abel

Sabemos que la derivada de un polinomio

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

viene dada por

$$p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1}.$$

Teniendo esto en cuenta, para la serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \quad (3.1)$$

sería razonable que

$$f'(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}. \quad (3.2)$$

Aunque esto pueda parecer correcto intuitivamente, al estar tratando con sumas infinitas, debemos probarlo. La demostración de este hecho constará de dos etapas. En primer lugar probaremos que si la serie de potencias $f(z)$ definida en (3.1) converge para $|z| < R$, entonces la serie de potencias $f'(z)$ dada por (3.2) también converge en $|z| < R$. En segundo lugar, demostraremos que $f(z)$ es holomorfa en $|z| < R$ y que su derivada viene dada por (3.2).

Proposición 3.5.1. *Sea $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia R . Entonces, la serie de potencias $g(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ converge en $|z| < R$.*

Demostración. Sean $z \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ tales que $|z| < r < R$. Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ es absolutamente convergente. Esto implica que los sumandos deben estar acotados, pongamos $|a_n r^n| < K$ para todo $n \geq 0$. Sea $q = \frac{|z|}{r}$. Tenemos que $0 < q < 1$. Entonces,

$$|n a_n z^{n-1}| = n |a_n| \left| \frac{z}{r} \right|^{n-1} r^{n-1} < n \frac{K}{r} q^{n-1}.$$

Sabemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Entonces, por el criterio de comparación, $\sum_{n \geq 1} |na_n z^{n-1}|$ converge. Por lo tanto, $\sum_{n \geq 1} na_n z^{n-1}$ es absolutamente convergente y, por lo tanto, convergente. \square

Finalmente, tenemos el teorema de Abel:

Teorema 3.5.2 (Teorema de Abel). *Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Entonces,*

1. *Para cada $k \geq 1$, la serie*

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z-a)^{n-k} \tag{3.3}$$

converge en la bola $B(a, R)$.

2. *La función f es infinitamente \mathbb{C} -diferenciable en $B(a, R)$ y además, $f^{(k)}(z)$ es la serie (3.3) para toda $k \geq 1$.*

3. *Para $n \geq 0$, $a_n = f^{(n)}(a)/n!$.*

Demostración. En primer lugar observamos que solo es necesario probar el teorema en el caso $k = 1$. Los casos $k = 2, 3, \dots$ pueden obtenerse aplicando el teorema para $k = 1$ repetidas veces. También podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $a = 0$.

El primer apartado es cierto por la proposición anterior.

Demostremos ahora el segundo apartado. Como hemos comentado, solo necesitamos probar que si $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$, entonces existe $f'(z)$ y vale $g(z)$. Consideremos las series de potencias

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k.$$

Fijemos un punto $w \in D(0, R)$ y r tal que $|w| < r < R$. Sea δ muy pequeña (más adelante precisaremos cuanto) de tal forma que $D(w, \delta) \subset D(0, r)$. Tomemos $z \in D(w, \delta)$. Queremos ver que $f'(w) = g(w)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) &= \\ &= \left(\frac{s_n(z) - s_n(w)}{z - w} - s'_n(w) \right) + (s'_n(w) - g(w)) + \left(\frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} \right). \end{aligned}$$

En primer lugar,

$$\frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} = \frac{1}{z - w} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(z^k - w^k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{z^k - w^k}{z - w}.$$

Además,

$$\left| \frac{z^k - w^k}{z - w} \right| = |z^{k-1} + z^{k-2}w + \dots + zw^{k-2} + w^{k-1}| \leq kr^{k-1}.$$

Entonces,

$$\left| \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| kr^{k-1}.$$

Como $r < R$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| kr^{k-1}$ la serie converge y por tanto, para n suficientemente grande,

$$\left| \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Además, como $s'_n(w) \rightarrow g(w)$, tomamos una n aun más grande, de forma que $|s'_n(w) - g(w)| < \varepsilon/3$. Finalmente, una vez fijada n , como s_n es un polinomio, es holomorfo y por tanto tomando δ suficientemente pequeño,

$$\left| \frac{s_n(z) - s_n(w)}{z - w} - s'_n(w) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sumando los tres términos hemos probado el segundo apartado. Finalmente, evaluando la serie en 0, tenemos $f(0) = a_0$. Además, como tenemos que $f^{(k)}$ viene dada por (3.3), entonces, $f^{(k)}(0) = k!a_k$. \square

Del teorema anterior se deduce que si una serie de potencias es holomorfa en un disco D , entonces es derivable infinitamente en ese mismo disco D .

El análisis complejo tiene interacción con muchas áreas de las matemáticas. Un ejemplo de este hecho es la función zeta de Riemann. En el siguiente vídeo se presenta esta función compleja, definida como una serie, y se muestra su relación con la teoría de números.

Vídeo La función zeta de Riemann

3.6. Problemas

1. Sea z_n una sucesión en el plano complejo. Demuestra que si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es convergente, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

2. Encuentra para qué valores de $z \in \mathbb{C}$ la serie

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{1+z} \right)^n$$

es convergente.

Solución: Sea $w = \frac{z}{1+z}$. La serie $\sum_{n \geq 0} w^n$ es convergente si y solo si $|w| < 1$. Esto es cierto ya que, si $|w| < 1$, la serie $\sum_{n \geq 0} w^n$ es absolutamente convergente y, de hecho (ver el segundo vídeo del tema),

$$\sum_{n \geq 0} w^n = \frac{1}{1-w}.$$

Por otro lado, cuando $|w| \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} w^n \neq 0$ y por lo tanto la serie es divergente. Por lo tanto, los valores de z que hacen que la serie sea convergente son los que cumplen

$$\left| \frac{z}{1+z} \right| < 1 \iff |z|^2 < |1+z|^2 \iff 0 < 1 + 2\Re(z).$$

3. Considera la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^n}.$$

Comprueba que la serie es absolutamente convergente usando tanto el criterio del cociente como el criterio de la raíz.

Solución: En este caso $z_n = i^n/2^n$. Como

$$\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \left| \frac{i^{n+1} 2^n}{2^{n+1} i^n} \right| = \left| \frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2},$$

por el criterio del cociente, la serie converge absolutamente.

Usemos ahora el criterio de la raíz. En este caso, como

$$\sqrt[n]{|z_n|} = \sqrt[n]{\left| \frac{i^n}{2^n} \right|} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2},$$

por el criterio de la raíz, la serie es absolutamente convergente.

4. Encuentra el disco de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n z^n}{n}.$$

Solución: En este caso, $a_n = \frac{2^n}{n}$. Tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} n}{n+1 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2.$$

Por el criterio del cociente, el radio de convergencia es $R = \frac{1}{2}$. Entonces, el disco de convergencia es $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < \frac{1}{2}\}$.

5. Encuentra el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Solución: En este caso, $a_n = \frac{1}{n!}$. Tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Por el criterio del cociente, el radio de convergencia es $R = \infty$. En consecuencia, la serie de potencias converge para todo $z \in \mathbb{C}$.

6. Encuentra el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n.$$

Solución: En este caso, $a_n = n!$. Tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Por el criterio del cociente, el radio de convergencia es $R = 0$. En este caso, la serie de potencias solo converge en $z = 0$.

7. Encuentra el disco de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p z^n.$$

Solución: En este caso, $a_n = n^p$. Tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^p}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^p = 1^p = 1.$$

Por el criterio del cociente, el radio de convergencia es $R = 1$, al margen del valor de p . Entonces, el disco de convergencia es $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

8. Considera la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

donde

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{1}{3^n}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Comprueba que ninguna de las dos fórmulas para el radio de convergencia dadas en la Proposición 5 sirven para calcular el radio de convergencia en este caso. Demuestra que la serie converge para $|z| < 2$.

Indicación: Usa el criterio de comparación para series.

9. Función de Bessel de primera clase de orden cero

La función de Bessel de primera clase de orden cero $J_0(z)$ es la única función desarrollable en serie de potencias en el origen tal que

$$z^2 J_0''(z) + z J_0'(z) + z^2 J_0(z) = 0, \quad J_0(0) = 1, \quad J_0'(0) = 0.$$

Encuentra su serie de potencias $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ y prueba que define una función holomorfa en todo el plano complejo.

Solución: En el disco de convergencia (si lo tiene) la serie $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ que define J_0 tiene que cumplir la ecuación diferencial que la define. Por lo tanto,

$$z^2 \sum_{n \geq 2} a_n n(n-1) z^{n-2} + z \sum_{n \geq 1} a_n n z^{n-1} + z^2 \sum_{n \geq 0} a_n z^n = 0,$$

o lo que es lo mismo,

$$\sum_{n \geq 2} (a_n (n(n-1) + n) + a_{n-2}) z^n = 0. \quad (3.4)$$

Como el desarrollo en serie de potencias es único, los coeficientes de la serie de potencias de la izquierda en (3.4) tienen que ser nulos:

$$a_n n^2 + a_{n-2} = 0 \iff a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}. \quad (3.5)$$

Ahora usemos las condiciones iniciales $J_0(0) = 1$, $J_0'(0) = 0$. Tenemos que $J_0(0) = a_0$ y $J_0'(0) = 1$. Por lo tanto, $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$. Usando la recurrencia (3.5), tenemos

$$a_{2k-1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k(2k-2) \cdots 4 \cdot 2)^2} = \frac{(-1)^k}{((2k)!!)^2}.$$

Entonces, la función $J_0(z)$ está definida por la serie

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{((2n)!!)^2} z^{2n}.$$

Es fácil ver que esta serie de potencias tiene radio de convergencia $R = \infty$ y por lo tanto define una función holomorfa en todo el plano complejo.

10. Considera un número complejo α . Definimos la función $f(z)$ como la serie de potencias

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \dots \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} z^n. \end{aligned}$$

- a) Demuestra que f tiene radio de convergencia $R = 1$.
b) Demuestra que si $|z| < 1$,

$$f'(z) = \frac{\alpha f(z)}{1+z}.$$

- c) Demuestra que $f(z) = (1+z)^\alpha$ para $|z| < 1$.
d) ¿Qué ocurre si α es un entero no negativo?

Indicación: Para el tercer apartado, considera la función $g(z) = \frac{f(z)}{(1+z)^\alpha}$.

Capítulo 4

Funciones elementales

4.1. Introducción y objetivos

En este tema definiremos rigurosamente algunas funciones elementales en el plano complejo. Veremos que estas definiciones coinciden con funciones reales bien conocidas, aunque su generalización al plano complejo no siempre es totalmente trivial.

En primer lugar presentaremos la función exponencial y veremos que es holomorfa en todo el plano complejo. Esta función nos permitirá definir todas las que la seguirán: las funciones trigonométricas \sin y \cos , las funciones hiperbólicas \sinh y \cosh y el logaritmo natural.

En el caso del logaritmo, veremos que hay infinitas formas posibles de definir el logaritmo natural, ya que se trata de una función multivaluada. Por lo tanto, en este caso fijaremos un valor para el logaritmo, llamado determinación principal del logaritmo. Será precisamente el logaritmo complejo el que nos permitirá definir la potenciación con exponente complejo.

En concreto, estudiaremos las siguientes funciones:

- La función exponencial \exp
- Las funciones trigonométricas \sin , \cos
- Las funciones hiperbólicas \sinh , \cosh
- La función logaritmo \log
- La potenciación b^z

En la sección de problemas veremos algunas propiedades interesantes de todas estas funciones. En particular, veremos cuales son las partes real e imaginaria de todas estas funciones y en que subconjuntos de \mathbb{C} estas funciones toman valores reales o imaginarios puros. También veremos que la identidad $\log xy = \log x + \log y$, tan bien conocida en el caso $x, y \in \mathbb{R}$, no siempre se cumple en el caso complejo.

4.2. La función exponencial

La función exponencial entendida como la función real de variable real $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es de sobras conocida. Sin embargo, ahora vamos a redefinirla como función del plano complejo.

Definición 4.2.1 (La función exponencial). *Definimos la **función exponencial** como la serie de potencias*

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Proposición 4.2.2. *La función exponencial es holomorfa en todo el plano complejo.*

Demostración. Si calculamos el radio de convergencia de la función exponencial usando el criterio del cociente, tenemos

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Por lo tanto el radio de convergencia es $R = \infty$, de modo que la serie de potencias converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$. En conclusión, la función exponencial es holomorfa en todo el plano complejo. \square

Usando el teorema de Abel visto en el tema anterior, podemos derivar la serie de potencias de la función exponencial término a término. De este modo,

$$(\exp(z))' = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z).$$

Es bien sabido que en el caso real, si $x, y \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$e^{x+y} = e^x e^y.$$

Este hecho también es cierto en el plano complejo, pero la demostración requiere de un pequeño resultado previo.

Lema 4.2.3. *Sea f una función holomorfa en un dominio D tal que $f'(z) = 0$ para todo $z \in D$. Entonces f es constante en D .*

Demostración. Ya sabemos que si $f = u + iv$, podemos calcular su derivada compleja como

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Por lo tanto, $f'(z) = 0$ implica que las cuatro derivadas parciales de la ecuación anterior se anulan. Sabemos del análisis real que si una función $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tiene

derivada nula, entonces es constante. Si $L = \{t + iy_0 \mid t \in [a, b]\}$ es un segmento en D , definimos $\phi(t) = u(t, y_0)$. Tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \phi' = 0,$$

y por tanto f es constante en L . De forma similar probamos que u y v son constantes en cualquier segmento horizontal o vertical de D . Como podemos unir dos puntos cualesquiera en D mediante un camino formado por segmentos verticales y horizontales, deducimos que f es constante en D . \square

Proposición 4.2.4. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Entonces, $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$.

Demostración. Sea $c \in \mathbb{C}$ constante y definamos $f(z) = \exp(z) \exp(c - z)$. Por la regla de Leibniz, tenemos

$$f'(z) = \exp(z) \exp(c - z) - \exp(z) \exp(c - z) = 0.$$

Por el lema anterior, vemos que f es constante. En particular, tenemos $f(0) = \exp(c)$. Por lo tanto,

$$\exp(z) \exp(c - z) = \exp(c).$$

Tomando $c = z_1 + z_2$ y $z = z_1$ obtenemos el resultado deseado. \square

En particular, tomando $z_1 = z$ y $z_2 = -z$ en la demostración anterior, tenemos

$$1 = \exp 0 = \exp(z - z) = \exp(z) \exp(-z).$$

Por lo tanto $\exp(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Ya sabíamos que la ecuación $e^x = 0$ no tiene soluciones reales, pero ahora sabemos que tampoco tiene soluciones complejas.

Finalmente conectaremos la función exponencial con el número e . Definimos el número e como el número real $e = \exp(1)$. Iterando la proposición anterior, tenemos

$$e^n = \exp(1)^n = \exp\left(1 + \dots + 1\right) = \exp(n).$$

Para un número racional m/n con $n > 0$ tenemos

$$(\exp(m/n))^n = \exp(nm/n) = \exp(m) = e^m,$$

y por lo tanto $\exp(m/n) = e^{m/n}$. Por lo tanto, como los números racionales son densos en los reales, la notación $e^z = \exp(z)$ no entra en conflicto con la definición habitual de e^x para $x \in \mathbb{R}$. En particular, si $z = x + iy$, tenemos

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy}.$$

4.3. Funciones trigonométricas

Definición 4.3.1 (Funciones trigonométricas). *Definimos las **funciones trigonométricas** $\sin, \cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como las series de potencias*

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Cambiando z por $-z$, vemos que el coseno es una función par, mientras que el seno es una función impar:

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z.$$

Además, $\cos(0) = 1$ y $\sin(0) = 0$. Usando el teorema de Abel, podemos derivar término a término las series y obtenemos que

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z.$$

Sumando las series de potencias de \sin y \cos obtenemos

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Cambiando z por $-z$ tenemos $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$. Por lo tanto,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

A partir de estas expresiones encontramos que $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$. Todas estas expresiones eran de sobras conocidas en el caso real. Ahora ya sabemos que también son ciertas en el caso complejo. A partir de aquí, podríamos probar también todo el resto de identidades trigonométricas, como las fórmulas para el coseno y el seno de la suma, del ángulo múltiple, etc.

4.4. Períodos de una función compleja

Definición 4.4.1 (Período de una función). *Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Decimos que un complejo $p \in \mathbb{C}$ es un **período** de f si*

$$f(z + p) = f(z) \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

En el siguiente vídeo se prueba que los períodos de la función exponencial son los complejos de la forma $2n\pi i$ con $n \in \mathbb{N}$. También se encuentran los períodos de las funciones trigonométricas.

Vídeo Períodos de una función compleja

4.5. Funciones hiperbólicas

Habiendo definido adecuadamente la función exponencial en el plano complejo, podemos usarla para extender las funciones hiperbólicas a todo el plano complejo.

Definición 4.5.1 (Funciones hiperbólicas). *Definimos las **funciones hiperbólicas** $\sinh, \cosh: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como*

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Por lo tanto, del mismo modo que las funciones trigonométricas, las funciones hiperbólicas son enteras. Derivando, vemos que

$$(\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z.$$

Usando las definiciones es sencillo comprobar todas las identidades de las funciones hiperbólicas como por ejemplo

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

4.6. La función logaritmo

En el análisis real es habitual definir el logaritmo natural como la función inversa a la exponencial. Es decir, que $\ln y = x$ si $e^x = y$. De ahora en adelante usaremos la notación \ln para denotar al logaritmo natural real.

Consideremos el análogo a esto en el plano complejo. Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y consideremos la ecuación

$$e^w = z.$$

Como los períodos de la función exponencial son los complejos de la forma $2n\pi i$, si w_1 es una solución de la ecuación anterior, $w_1 + 2n\pi i$ también lo es. Cada uno de estos valores es un logaritmo de z y los denotamos por $\log z$. De este modo, a diferencia de lo que ocurre en el caso real, tenemos que el logaritmo es lo que llamamos una **función multivaluada**. Queremos encontrar una fórmula para $\log z$. Sea $w = x + iy$. Entonces,

$$z = e^w = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Tomando módulos, vemos que $e^x = |z|$. Notemos que tanto x como $|z|$ son números reales, y por tanto $x = \ln |z|$. Tomando el argumento en la ecuación anterior, vemos que $y = \arg z$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 4.6.1 (Logaritmo complejo). *Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Un **logaritmo complejo** de z es*

$$\log z = \ln |z| + i \arg z,$$

donde $\arg z$ es un argumento de z .

La **determinación principal del logaritmo** es el valor de $\log z$ tomando la determinación principal del argumento, $\text{Arg } z$, es decir, el único argumento en el intervalo $(-\pi, \pi]$. Denotamos la el logaritmo principal como

$$\text{Log } z = \ln |z| + i \text{Arg } z,$$

Es importante remarcar que decimos un logaritmo complejo (en lugar de el logaritmo complejo) para enfatizar que el logaritmo complejo es una función multivaluada. Tratar con funciones multivaluadas tiene sus dificultades. Una posible solución consiste en considerar el logaritmo en el subconjunto del plano

$$C = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Proposición 4.6.2. *La determinación principal del logaritmo $\text{Log } z$ es continua en el conjunto C .*

Demostración. La demostración es inmediata si tenemos en cuenta que el argumento principal $\text{Arg } z$ es continuo en C . \square

Una vez hemos visto que el logaritmo principal es continuo, podemos proceder a calcular su derivada compleja.

Proposición 4.6.3. *El logaritmo principal $\text{Log } z$ es holomorfo en el conjunto C y su derivada compleja es*

$$(\text{Log } z)' = \frac{1}{z}.$$

Demostración. Sea $w = \text{Log } z$. Entonces $z = e^w$. Sea $\text{Log}(z + h) = w + k$. Por la proposición anterior, como $\text{Log } z$ es continuo en C , tenemos que $k \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (\text{Log } z)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(z + h) - \text{Log } z}{h} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{(w + k) - w}{e^{w+k} - e^w} \\ &= \frac{1}{\lim_{k \rightarrow 0} \frac{e^{w+k} - e^w}{k}} \\ &= \frac{1}{(e^w)'} \\ &= \frac{1}{e^w} \\ &= \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

\square

Dados dos números reales $x, y \in \mathbb{R}$, es bien sabido que

$$\log xy = \log x + \log y.$$

Sin embargo, el logaritmo complejo no satisface esta propiedad. En el siguiente vídeo se enunciará y probará la versión compleja de esta propiedad y se mostrará un ejemplo de dos números complejos que no satisfacen la propiedad en el caso real.

Vídeo El logaritmo de un producto

Habiendo definido adecuadamente el logaritmo complejo, podemos usarlo para definir las potencias complejas. Dados $b, z \in \mathbb{C}$, definimos la **determinación principal de la potenciación** como

$$b^z = e^{z \operatorname{Log} b}.$$

Las demás determinaciones de la potenciación son $b^z = e^{z \log b}$.

4.7. Problemas

1. Demuestra que las series de potencias que definen las funciones sin y cos son absolutamente convergentes en todo el plano complejo.

Solución: Tomemos la serie de potencias del coseno:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

En este caso, $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$. Usaremos el criterio del cociente para calcular el radio de convergencia. Por lo tanto,

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} \right|}{\left| \frac{(-1)^n}{(2n)!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 0.$$

En conclusión, $R = \infty$. El caso del seno es totalmente análogo.

2. Usa las definiciones que hemos introducido en este tema para probar que

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

3. Demuestra las siguientes igualdades:

$$\cos iz = \cosh z, \quad \sin iz = i \sinh z.$$

4. Comprueba que las funciones trigonométricas $\sin z$ y $\cos z$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann y encuentra sus partes real e imaginaria.

Solución: Tenemos que

$$\begin{aligned}\sin z &= \sin(x + iy) \\ &= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} \\ &= \frac{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^y}{2i} \\ &= \frac{e^{-y} \cos x - e^y \cos x + i(e^{-y} \sin x + e^y \sin x)}{2i} \\ &= \frac{e^{-y} \sin x + e^y \sin x}{2} + i \frac{e^y \cos x - e^{-y} \cos x}{2} \\ &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{cases} u(x, y) = \sin x \cosh y, \\ v(x, y) = \cos x \sinh y. \end{cases}$$

En el caso del coseno, podemos ver de forma análoga que

$$\begin{cases} u(x, y) = \cos x \cosh y, \\ v(x, y) = -\sin x \sinh y. \end{cases}$$

De forma alternativa, podemos usar que

$$\begin{aligned}\cos z &= \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cosh y + i \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sinh y \\ &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.\end{aligned}$$

5. Comprueba que las funciones hiperbólicas $\sinh z$ y $\cosh z$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann y encuentra sus partes real e imaginaria.

Solución: Veremos el caso del coseno hiperbólico. El caso del seno hiperbólico es totalmente análogo. Tenemos que

$$\begin{aligned}\cosh z &= \cosh(x + iy) \\ &= \frac{e^{x+iy} + e^{-(x+iy)}}{2} \\ &= \frac{e^x e^{iy} + e^{-x} e^{-iy}}{2} \\ &= \frac{e^x \cos y + e^{-x} \cos y + i(e^x \sin y - e^{-x} \sin y)}{2} \\ &= \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y.\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{cases} u(x, y) = \cosh x \cos y, \\ v(x, y) = \sinh x \sin y. \end{cases}$$

En el caso del seno hiperbólico, obtenemos

$$\begin{cases} u(x, y) = \sinh x \cos y, \\ v(x, y) = \cosh x \sin y. \end{cases}$$

6. Encuentra las fórmulas para calcular $\sinh(z_1 + z_2)$ y $\cosh(z_1 + z_2)$.
7. Para cada una de las funciones \exp , \sin , \cos , \sinh , \cosh , encuentra el conjunto de puntos para los cuales asume (1) valores reales, y (2) valores imaginarios puros.

Solución:

- a) Una función a valores complejos toma valores reales si y solo si su parte imaginaria es nula.

- En el caso de la función exponencial, si $z = x + iy$ tenemos

$$e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y,$$

que será real si y solo si $e^x \sin y = 0$. Como $e^x > 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$, la parte imaginaria de e^z será nula si y solo si $\sin y = 0$, i.e. $y = \pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

- Usando los resultados del ejercicio 4, tenemos que $\sin z$ es real si y solo si $\cos x \sinh y = 0$, es decir que o bien $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$, o si $y = 0$.
- Según el ejercicio 4, la parte imaginaria de $\cos z$ es $-\sin x \sinh y$, que se anulará si $y = \pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$, o si $y = 0$.
- La parte imaginaria de $\sinh z$ es $\cosh x \sin y$ (ver ejercicio 5), que se anula si y solo si $y = \pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$, ya que $\cosh x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Como hemos visto en el ejercicio 5, la parte imaginaria de $\cosh z$ es $\sinh x \sin y$, que se anula si y solo si $x = 0$ o si $y = \pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

- b) Una función compleja toma valores imaginarios puros si y solo si la parte real se anula.

- La exponencial $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$ tiene parte real nula si y solo si $e^x \cos y = 0$, es decir si $\cos y = 0$. En conclusión, e^z toma valores imaginarios puros si y solo si $y = \frac{\pi}{2} + \pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$.
- La parte real de $\sin z$ es $\sin x \cosh y$, que se anula si y solo si $\sin x = 0$, es decir si $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

- La parte real de $\cos z$ es $\cos x \cosh y$, que se anula si y solo si $\cos x = 0$, es decir si $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
- La parte real de $\sinh z$ es $\sinh x \cos y$ que se anula si y solo si $x = 0$ o si $y = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
- La parte real de $\cosh z$ es $\cosh x \cos y$, que se anula si y solo si $y = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

8. Encuentra los ceros de la función $f(z) = 1 + e^z$.

Solución: Consideremos la función $f(z) = 1 + e^z$. Sea $z = x + iy$ y supongamos que $f(z) = 0$. Entonces,

$$e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y = -1.$$

Si comparamos partes reales e imaginarias, llegamos a

$$\begin{cases} e^x \cos y = -1, \\ e^x \sin y = 0. \end{cases}$$

Como $e^x > 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$, la segunda ecuación implica que $y = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Sustituyendo en la primera ecuación, tenemos que $(-1)^k e^x = -1$. Si k es par, tenemos la ecuación $e^x = -1$ que no tiene soluciones reales. Por otro lado, si k es impar, tenemos $e^x = 1$, es decir que $x = 0$. Por lo tanto, las soluciones de $f(z) = 0$ son $z = (2k + 1)\pi i$, con $k \in \mathbb{Z}$.

9. Encuentra los ceros de la función $g(z) = 1 + i - e^z$.

Solución: Consideremos la función $g(z) = 1 + i - e^z$. Sea $z = x + iy$ y supongamos que $g(z) = 0$. En este caso,

$$e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y = 1 + i.$$

Comparando partes reales e imaginarias,

$$\begin{cases} e^x \cos y = 1, \\ e^x \sin y = 1. \end{cases}$$

Como $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos que $\cos y = \sin y$. Por lo tanto tenemos dos opciones: o bien $y = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, o bien $y = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$.

En el primer caso,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

y por lo tanto $e^x = \sqrt{2}$. Entonces $x = \ln \sqrt{2}$.

En el segundo caso,

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}},$$

y por lo tanto $e^x = -\sqrt{2}$, que no tiene soluciones reales.

Por lo tanto, las soluciones de $g(z) = 0$ son

$$z = \ln \sqrt{2} + i \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

10. Encuentra todas las determinaciones, señalando la principal, de i^i .

Solución: Consideremos $b = z = i$. Entonces, $|i| = 1$, $\arg i = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ y el valor principal del argumento es $\text{Arg } i = \frac{\pi}{2}$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{Log } i &= \ln 1 + i \frac{\pi}{2} = i \frac{\pi}{2}, \\ \log i &= \ln 1 + i \frac{\pi}{2} + 2n\pi = i \frac{\pi}{2} + 2n\pi. \end{aligned}$$

Entonces, la determinación principal de i^i es

$$i^i = e^{i \text{Log } i} = e^{-\frac{\pi}{2}},$$

mientras que las determinaciones subsidiarias son

$$i^i = e^{i \log i} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}.$$

Capítulo 5

Integración compleja y teorema de Cauchy

5.1. Introducción y objetivos

En este tema introduciremos la noción de integral de una función compleja a lo largo de un camino. Estudiaremos las propiedades de estas integrales y demostraremos el teorema fundamental de la integración en contornos, que es el análogo en análisis complejo del teorema fundamental del cálculo. También enunciaremos y probaremos el lema de estimación, fundamental para demostrar multitud de resultados, como iremos viendo.

En segundo lugar, introduciremos el concepto de índice de un camino cerrado alrededor de un punto. El índice nos indicará el número de vueltas, entendiendo el sentido antihorario como el positivo, que da el camino alrededor de un punto. Veremos que este concepto aparentemente topológico está estrechamente relacionado con las integrales a lo largo de caminos y, de hecho, nos permitirá probar el teorema de Cauchy.

Finalmente enunciaremos y probaremos varias versiones del teorema de Cauchy. En su versión más simple, el teorema de Cauchy nos dice que dada una función f holomorfa en un dominio simplemente conexo D y un camino γ cerrado en D , entonces

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

5.2. Caminos y contornos

Antes de poder integrar a lo largo de un camino, necesitamos precisar qué entendemos por camino.

Definición 5.2.1 (Camino en \mathbb{C}). Un **camino** es una función continua $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Diremos que el camino γ empieza en $\gamma(a)$ y termina en $\gamma(b)$. El camino γ es un **ciclo**, un **bucle** o un **camino cerrado** si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Hemos definido un camino como una función, aunque en muchas ocasiones será más útil ver un camino como un conjunto de puntos del plano, identificando un camino con su imagen. En estos casos, será importante tener muy presente la orientación del camino, es decir su inicio y su final. Si pensamos en los caminos de esta forma, diremos que la función $\gamma(t)$ es una parametrización del camino γ . En este sentido, podemos ver que las funciones $\gamma_1, \gamma_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por $\gamma_1(t) = t + it$, $\gamma_2(t) = t^2 + it^2$ son dos parametrizaciones del segmento que une el origen con el punto $1 + i$. Más adelante veremos que la integral a lo largo de un camino no depende de la parametrización elegida.

Dados dos complejos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, podemos definir $\gamma(t) = (1 - t)z_1 + tz_2$, para $t \in [0, 1]$. La imagen γ es el segmento que une los complejos z_1, z_2 . A menudo denotaremos este camino como $[z_1, z_2]$.

Otro ejemplo importante de camino es el dado por la parametrización

$$\gamma(t) = re^{it} = r(\cos t + i \sin t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad (5.1)$$

que describe una circunferencia de radio r centrada en el origen recorrida en sentido antihorario.

Definición 5.2.2 (Camino suave). *Diremos que un camino $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es **suave** si es diferenciable y γ' es continua.*

Notamos que todos los ejemplos de caminos descritos hasta ahora son diferenciables. A continuación usaremos integrales para definir la noción de longitud de un camino.

Definición 5.2.3 (Longitud de un camino). *La **longitud** de un camino $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es*

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Es fácil ver que $\ell([z_1, z_2]) = |z_2 - z_1|$, mientras que si γ es el camino definido por (5.1), tenemos que $\ell(\gamma) = 2\pi r$.

A menudo queremos integrar a lo largo de la unión de varios caminos. Esto podría hacerse fabricando un camino que los una todos mediante una parametrización adecuada, pero esto complica las cosas innecesariamente. En lugar de esto, emplearemos la noción de contorno.

Definición 5.2.4 (Contorno). *Un **contorno** γ es una colección $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ de caminos suaves tales que el final de γ_r coincide con el inicio de γ_{r+1} , $1 \leq r \leq n - 1$. Lo escribimos como*

$$\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n.$$

*Si, además, el inicio de γ_1 coincide con el final de γ_n , decimos que γ es un **contorno cerrado**.*

*Definimos la **longitud de un contorno** como*

$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma_1) + \dots + \ell(\gamma_n).$$

Por lo tanto, un contorno es un camino suave excepto en un conjunto finito de puntos.

Ejemplo 5.2.5. *Dados $0 < r < R$, definimos*

$$\begin{aligned}\gamma_1: [r, R] &\rightarrow \mathbb{C}, & \gamma_1(t) &= t, \\ \gamma_2: [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{C}, & \gamma_2(t) &= Re^{it}, \\ \gamma_3: [-R, -r] &\rightarrow \mathbb{C}, & \gamma_3(t) &= t, \\ \gamma_4: [-\pi, 0] &\rightarrow \mathbb{C}, & \gamma_4(t) &= re^{-it}.\end{aligned}$$

Entonces, el camino $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ es un contorno cerrado (ver Figura 5.1).

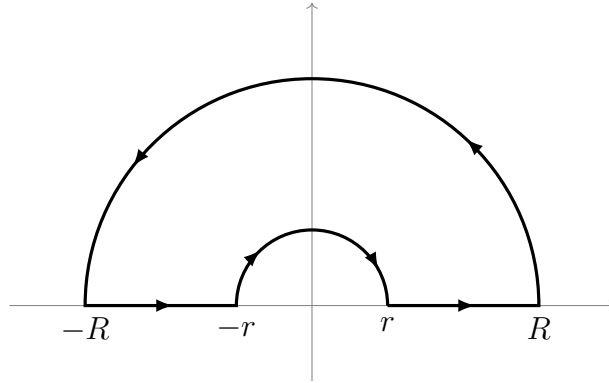


Figura 5.1: El contorno $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$. Fuente: Elaboración propia

Definición 5.2.6 (Inverso de un camino). *Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino. El camino inverso de γ es el camino $-\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ dado por*

$$-\gamma(t) = \gamma(a + b - t).$$

5.3. Integración en caminos

Sea $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ una función definida en un dominio D de \mathbb{C} . Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ un camino suave en D .

Definición 5.3.1 (Integral a lo largo de un camino). *La integral de f a lo largo de γ es*

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Ejemplo 5.3.2. *Consideremos la función $f(z) = z^2$ y el camino $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $\gamma(t) = t^2 + it$. En este caso, $f(\gamma(t)) = (t^2 + it)^2 = t^4 - t^2 + 2it^3$ y $\gamma'(t) = 2t + i$.*

Entonces,

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
 &= \int_0^1 (t^4 - t^2 + 2it^3)(2t + i)dt \\
 &= \int_0^1 (2t^5 - 4t^3)dt + i \int_0^1 (5t^4 - t^2)dt \\
 &= \left[\frac{t^6}{3} - t^4 \right]_0^1 + i \left[t^5 - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\
 &= -\frac{2}{3} + i\frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

La siguiente proposición demuestra que la definición de integral a lo largo de un camino no depende de la parametrización elegida.

Proposición 5.3.3. *Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una camino suave y sea $\phi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ una función diferenciable, biyectiva y creciente. Entonces, $\gamma \circ \phi: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ es un camino que tiene la misma imagen que γ . Además, para toda función continua f ,*

$$\int_{\gamma \circ \phi} f = \int_{\gamma} f.$$

Demostración. Es evidente que γ y $\gamma \circ \phi$ tienen la misma imagen. De hecho son dos parametrizaciones diferentes de un mismo camino. Además,

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma \circ \phi} f &= \int_c^d f(\gamma(\phi(t)))(\gamma \circ \phi)'(t)dt \\
 &= \int_c^d f(\gamma(\phi(t)))\gamma'(\phi(t))\phi'(t)dt \\
 &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.
 \end{aligned}$$

□

Notamos que si la función ϕ es decreciente, $\gamma \circ \phi$ y γ tienen la misma imagen pero recorrida en sentidos opuestos. En este caso, tenemos que $\int_{\gamma \circ \phi} f = -\int_{\gamma} f$. Por

lo tanto, tenemos que $\int_{-\gamma} f = -\int_{\gamma} f$. Dado un contorno $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ en un dominio D , definimos

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \dots + \int_{\gamma_n} f.$$

Proposición 5.3.4. *Sean $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ dos funciones continuas, $c \in \mathbb{C}$ una constante y $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ contornos en D tales que el final de γ_1 coincide con el inicio de γ_2 . Entonces,*

1. $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f,$
2. $\int_{\gamma} (f + g) = \int_{\gamma} f + \int_{\gamma} g,$
3. $\int_{\gamma} cf = c \int_{\gamma} f,$
4. $\int_{-\gamma} f = - \int_{\gamma} f.$

Definición 5.3.5 (Antiderivada). Sea $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Una función $F: D \rightarrow \mathbb{C}$ es una **primitiva** (o una **antiderivada**) de f en D si $F' = f$.

Teorema 5.3.6 (Teorema fundamental de la integración en contornos). Sea $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua y F una primitiva de f en D . Sea γ un contorno de z_0 a z_1 en D . Entonces,

$$\int_{\gamma} f = F(z_1) - F(z_0).$$

Demostración. Es suficiente probar el teorema para caminos suaves. Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ un camino tal que $\gamma(a) = z_0$ y $\gamma(b) = z_1$. Definimos $w(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$ y sea $W(t) = F(\gamma(t))$. Por la regla de la cadena,

$$W'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t) = w(t).$$

Si $w(t) = u(t) + iv(t)$ y $W(t) = U(t) + iV(t)$, tenemos $U' = u$, $V' = v$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b w(t)dt \\ &= \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt \\ &= U(t)|_a^b + iV(t)|_a^b \\ &= W(t)|_a^b \\ &= F(z_1) - F(z_0). \end{aligned}$$

□

Es importante destacar que, en el teorema anterior, el resultado no depende del camino γ elegido.

Ejemplo 5.3.7. Sea $f(z) = z^2$ y sea γ un contorno cualquiera de $z_0 = 0$ a $z_1 = 1+i$. Sabemos que $F(z) = \frac{z^3}{3}$ es una primitiva de f . Entonces,

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \frac{1}{3}z_1^2 - \frac{1}{3}z_0^2 = \frac{(1+i)^3}{3} = -\frac{2}{3} + i\frac{2}{3}.$$

Notamos que si γ es un camino cerrado y f tiene una primitiva en un dominio que contenga γ , entonces $\int_{\gamma} f = 0$.

En análisis real, cualquier función f que se comporte razonablemente bien tiene una primitiva $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Sin embargo, en el caso del análisis complejo, la existencia de una primitiva en un dominio D es una condición muy fuerte. Tomemos por ejemplo la función $f(z) = 1/z$ definida en $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. El candidato natural a primitiva de f sería el logaritmo $\text{Log } z$. Pero $\text{Log } z$ no es continua en D y por lo tanto no puede ser diferenciable, de forma que no es una primitiva de $f(z) = 1/z$.

Siguiendo con la función $f(z) = 1/z$, consideremos el camino $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Por lo que hemos visto hasta ahora, no parece que podamos usar una primitiva para calcular la integral de f a lo largo de γ , de modo que usaremos la definición de integral a lo largo de un camino. Entonces,

$$\int_{\gamma} f = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt = 2\pi i.$$

Si f tuviera una primitiva en un dominio conteniendo γ , por el teorema anterior tendríamos que $\int_{\gamma} f = 0$. Por lo tanto, $f(z) = 1/z$ no tiene una primitiva en ningún dominio conteniendo el camino γ .

Teorema 5.3.8 (Integración por partes). *Sean f y g dos funciones holomorfas en un dominio D . Sea γ un camino en D con extremos z_0 y z_1 . Entonces,*

$$\int_{\gamma} fg' = f(z_1)g(z_1) - f(z_0)g(z_0) - \int_{\gamma} f'g.$$

Demostración. Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una parametrización del camino γ . Usando la integración por partes del análisis real,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} fg' &= \int_a^b f(\gamma(t))g'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(t))\frac{d}{dt}(g(\gamma(t)))dt \\ &= f(\gamma(t))g(\gamma(t))\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}(f(\gamma(t)))g(\gamma(t))dt \\ &= f(z_1)g(z_1) - f(z_0)g(z_0) - \int_a^b f'(\gamma(t))g(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= f(z_1)g(z_1) - f(z_0)g(z_0) - \int_{\gamma} f'g. \end{aligned}$$

□

5.4. El lema de estimación

Lema 5.4.1. Sean $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Entonces,

$$\left| \int_a^b (u(t) + iv(t)) dt \right| \leq \int_a^b |u(t) + iv(t)| dt.$$

Demostración. Escribamos $\int_a^b u + iv = X + iY$. Entonces,

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= (X - iY)(X + iY) \\ &= \int_a^b (X - iY)(u(t) + iv(t)) dt \\ &= \int_a^b Xu(t) + Yv(t) dt + i \int_a^b Xv(t) - Yu(t) dt. \end{aligned}$$

Como $X^2 + Y^2$ es real, tenemos que $\int_a^b Xv(t) - Yu(t) dt = 0$. Por lo tanto,

$$X^2 + Y^2 = \int_a^b Xu(t) + Yv(t) dt.$$

El integrando de la ecuación anterior es la parte real de $(X - iY)(u(t) + iv(t))$. Como $\Re z \leq |z|$, tenemos

$$\begin{aligned} Xu(t) + Yv(t) &\leq |(X - iY)(u(t) + iv(t))| \\ &= |X - iY| |u(t) + iv(t)| \\ &= \sqrt{X^2 + Y^2} |u(t) + iv(t)|. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$X^2 + Y^2 = \int_a^b Xu(t) + Yv(t) dt \leq \sqrt{X^2 + Y^2} \int_a^b |u(t) + iv(t)| dt,$$

de donde obtenemos que

$$\left| \int_a^b (u(t) + iv(t)) dt \right| = |X + iY| = \sqrt{X^2 + Y^2} \leq \int_a^b |u(t) + iv(t)| dt.$$

□

Lema 5.4.2 (Lema de estimación). Sea $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua y γ un contorno en D . Si $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in D$, entonces

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq M \ell(\gamma).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt \\ &\leq M \int_a^b |\gamma'(t)|dt \leq M \ell(\gamma). \end{aligned}$$

□

5.5. Índice de caminos y teorema de Cauchy

Hemos visto que si una función f tiene una primitiva en un dominio D , para todo camino cerrado γ en D tenemos que $\int_{\gamma} f = 0$. Si no sabemos si f tiene o no primitiva en D , el teorema de Cauchy nos dará condiciones para saber si esto se sigue cumpliendo. Antes de entrar en el teorema de Cauchy, necesitamos introducir una noción topológica: el índice de un camino.

Definición 5.5.1 (Índice de un camino alrededor de un punto). *El **índice** de una curva cerrada γ alrededor de un punto $z_0 \notin \gamma$ es un entero que representa el número total de vueltas que la curva describe alrededor del punto. Lo denotaremos como $n(\gamma, z_0)$. Entenderemos que el sentido antihorario es el sentido positivo.*

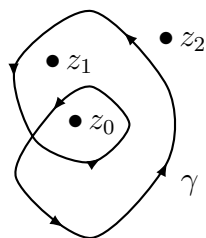


Figura 5.2: En esta figura, $n(\gamma, z_0) = 2$, $n(\gamma, z_1) = 1$ y $n(\gamma, z_2) = 0$.

Fuente: Elaboración propia

Proposición 5.5.2. *Sea γ un camino en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces existe una parametrización $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ de forma que el argumento sea una función continua sobre el camino γ . Cualquier otra parametrización con argumento continuo difiere de esta en un múltiplo entero de 2π .*

Ejemplo 5.5.3. *Consideremos el camino*

$$\gamma(t) = \begin{cases} re^{it}, & t \in [0, \pi], \\ re^{i(t+2\pi)}, & t \in (\pi, 2\pi], \end{cases}$$

que describe la circunferencia de centro 0 y radio r . En este caso,

$$\arg \gamma(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, \pi], \\ t + 2\pi, & t \in (\pi, 2\pi], \end{cases}$$

que no es una función continua. Sin embargo, podemos encontrar una reparametrización de γ con argumento continuo, por ejemplo, $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Dado un camino cerrado γ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, podemos interpretar el índice $n(\gamma, 0)$ como la diferencia de argumento a lo largo de γ dividido entre 2π .

Para poder usar el índice de caminos necesitaremos una caracterización analítica del índice. La siguiente proposición nos da una forma analítica de calcular el índice de un camino alrededor de un punto.

Proposición 5.5.4. *Sea γ un camino cerrado en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces,*

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z}.$$

Demostración. Para cada $\beta \in (-\pi, \pi]$, definimos el conjunto

$$\mathbb{C}_{\beta} = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\beta}, r > 0\},$$

es decir, el plano complejo salvo la semirrecta que parte del origen con ángulo β . Notamos que en \mathbb{C}_{β} podemos definir el argumento $\arg z$ como $\arg_{\beta} z = \theta$, donde

$$z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \beta - 2(m+1)\pi < \theta < \beta - 2m\pi,$$

para cualquier entero m . El caso $\beta = \pi$, $m = 0$ se corresponde con la determinación principal del argumento.

Sea γ un camino cerrado en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. En general, γ no estará contenido en el plano complejo salvo una semirrecta con extremo en el origen. Dividimos el camino γ en subcaminos $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ definidos en intervalos $[t_0, t_1], \dots, [t_{n-1}, t_n]$ de forma que cada γ_i esté contenido en \mathbb{C}_{β_i} . Elegimos en cada γ_i un valor del argumento, \arg_i , continuo en \mathbb{C}_{β_i} , tal que $\arg_i \gamma_i(t_i) = \arg_{i+1} \gamma_{i+1}(t_i)$, para cada $i \in \{1, n-1\}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_i} \frac{dz}{z} &= \log \gamma(t_i) - \log \gamma(t_{i-1}) \\ &= \log |\gamma(t_i)| - \log |\gamma(t_{i-1})| + i(\arg_i \gamma(t_i) - \arg_i \gamma(t_{i-1})). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} &= \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \frac{dz}{z} \\ &= \sum_{i=1}^n (\log |\gamma(t_i)| - \log |\gamma(t_{i-1})|) + i \sum_{i=1}^n (\arg_i \gamma(t_i) - \arg_i \gamma(t_{i-1})). \end{aligned}$$

Notamos que al sumar, las partes reales se cancelan. En cambio, las partes imaginarias suman

$$\arg_n \gamma(t_n) - \arg_0 \gamma(t_0),$$

que es el cambio total del argumento a lo largo de γ , es decir, $2\pi n(\gamma, 0)$. \square

Ejemplo 5.5.5. *Veamos algunos ejemplos que ilustran la proposición anterior.*

- Consideremos el camino $\gamma(t) = e^{4\pi it}$, donde $t \in [0, 1]$. Es fácil intuir que esta curva da dos vueltas al origen en sentido antihorario. Por lo tanto el índice de γ alrededor de 0 debería ser 2. Usemos la proposición anterior para calcularlo:

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{1}{e^{4\pi it}} 4\pi i e^{4\pi it} dt = \int_0^1 2 dt = 2.$$

- Consideremos el camino $\gamma(t) = e^{-it}$, donde $t \in [0, 2\pi]$. Podemos intuir que $n(\gamma, 0) = -1$. Usemos la proposición anterior:

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{-it}} (-i) e^{-it} dt = \int_0^{2\pi} \frac{-1}{2\pi} dt = -1.$$

La proposición anterior puede generalizarse para cualquier punto, además del origen.

Proposición 5.5.6. *Sea γ un camino cerrado en $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Entonces,*

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Esta proposición puede demostrarse simplemente mediante una traslación del origen. Veamos algunas propiedades del índice de una curva alrededor de un punto.

Proposición 5.5.7. *Sean $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ curvas cerradas en $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Entonces,*

- $n(\gamma_1 + \gamma_2, z_0) = n(\gamma_1, z_0) + n(\gamma_2, z_0)$.
- $n(-\gamma, z_0) = -n(\gamma, z_0)$.

En este punto ya podemos enunciar y probar el teorema de Cauchy.

Teorema 5.5.8 (Teorema de Cauchy). *Sea f una función holomorfa con derivadas parciales continuas en un dominio D y γ un camino cerrado en D tal que $n(\gamma, z_0) = 0$ para todo $z_0 \notin D$. Entonces,*

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

Demostración. El teorema de Green del cálculo integral dice que dado un camino $\gamma = \partial\Gamma$ suave a trozos y dadas funciones g, h de clase \mathcal{C}^1 en un abierto que contiene Γ , entonces

$$\int_{\gamma} g(x, y)dx + h(x, y)dy = \iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy.$$

Sea $f = u + iv$. Notemos que $dz = dx + idy$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_{\gamma} (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int_{\gamma} udx - vdy + i \int_{\gamma} vdx + udy \\ &= \iint_{\Gamma} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde hemos usado las ecuaciones de Cauchy–Riemann en la última igualdad. \square

Existen demostraciones del teorema de Cauchy más elementales que no usan el teorema de Green, sin embargo son muchas más largas y complicadas. El requerimiento de que la función f tenga derivadas parciales continuas es innecesario y, de hecho, probaremos más adelante que toda función holomorfa en un dominio D es infinitamente diferenciable en D . A continuación veremos algunas variantes del teorema de Cauchy.

Definición 5.5.9 (Dominio simplemente conexo). *Un dominio D es **simplemente conexo** si para todo contorno cerrado γ en D y para todo $z_0 \notin D$ se tiene que $n(\gamma, z_0) = 0$.*

Teorema 5.5.10 (Teorema de Cauchy para dominios simplemente conexos). *Sea f una función holomorfa en un dominio simplemente conexo D . Entonces, para todo contorno cerrado γ en D tenemos que $\int_{\gamma} f = 0$.*

Teorema 5.5.11 (Teorema de Cauchy generalizado). *Sea f una función holomorfa en un dominio D . Dados $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ contornos cerrados en D tales que*

$$n(\gamma_1, z_0) + \dots + n(\gamma_n, z_0) = 0$$

para todo $z_0 \notin D$, entonces

$$\int_{\gamma_1} f + \dots + \int_{\gamma_n} f = 0.$$

Demostración. Supongamos que γ_j tiene inicio y final en $z_j \in D$. Elijamos un $z_0 \in D$ cualquiera y contornos $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ contornos en D que unan z_0 a z_1, \dots, z_n respectivamente. Remarcamos que $\sigma_j + \gamma_j - \sigma_j$ es un contorno cerrado que empieza y

termina en z_0 y, además, para cada $z \notin D$ tenemos que $n(\sigma_j + \gamma_j - \sigma_j, z) = n(\gamma_j, z)$. También vemos que

$$\gamma = \sigma_1 + \gamma_1 - \sigma_1 + \cdots + \sigma_n + \gamma_n - \sigma_n$$

es un contorno cerrado con inicio y final en z_0 . Sea $z \notin D$, entonces

$$\begin{aligned} n(\gamma, z) &= n(\sigma_1 + \gamma_1 - \sigma_1 + \cdots + \sigma_n + \gamma_n - \sigma_n, z) \\ &= \sum_{j=1}^n n(\sigma_j + \gamma_j - \sigma_j, z) = \sum_{j=1}^n n(\gamma_j, z) = 0. \end{aligned}$$

Por el teorema de Cauchy tenemos que $\int_{\gamma} f = 0$. Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_{\sigma_j} f + \int_{\gamma_j} f + \int_{-\sigma_j} f \right) = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f,$$

ya que $\int_{-\sigma_j} f = - \int_{\sigma_j} f$. □

En los vídeos siguientes veremos como podemos usar la integración compleja, y en particular el teorema de Cauchy, para calcular integrales impropias reales.

Vídeo Ejemplo de cálculo de una integral impropia I

Vídeo Ejemplo de cálculo de una integral impropia II

Un último resultado que vamos a enunciar es el teorema de Morera, que ofrece una especie de recíproco del teorema de Cauchy.

Teorema 5.5.12 (Teorema de Morera). *Sea f una función compleja continua definida en un abierto Ω tal que*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

para toda curva cerrada de clase C^1 a trozos contenida en Ω . Entonces, f es holomorfa en Ω .

Las hipótesis de este teorema pueden debilitarse de forma que solo se exija sobre fronteras de rectángulos.

5.6. Problemas

1. Dibuja los caminos $\gamma_1(t) = 1 + i + 2e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$ y $\gamma_2(t) = \cosh(t) + i \sinh(t)$ con $t \in [-1, 1]$.
2. Calcula la integral de $f(x+iy) = x - y + ix^2$ a lo largo de los caminos siguientes:

- el segmento $[0, 1 + i]$,
 - el segmento del eje imaginario $[0, i]$,
 - el segmento horizontal $[i, 1 + i]$.
3. Dibuja los caminos $\gamma_1(t) = 2 + 2e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$ y $\gamma_2(t) = i + e^{-it}$ con $t \in [0, \pi/2]$. Usando la definición de integral de una función a lo largo de un camino, calcula las integrales

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-2} \quad \text{y} \quad \int_{\gamma_2} \frac{dz}{(z-i)^3}.$$

Solución: La primera integral tiene valor $2\pi i$. La segunda integral tiene valor 1.

4. Encuentra una parametrización de la circunferencia γ de centro 1 y radio 1 con inicio y final en el punto 2. Calcula la integral $\int_{\gamma} |z|^2 dz$.

Solución: $\int_{\gamma} f = 2\pi i$.

5. Calcula la integral $\int_{\gamma} |z|^2 dz$ en el caso que γ sea

- el contorno formado por el segmento que une 0 con i , y el segmento entre i y $1 + i$,
- el contorno formado por el segmento que une 0 con 1, y el segmento que une 1 con $1 + i$.

¿A qué conclusión podemos llegar?

Solución: La primera integral tiene valor $\frac{4}{3} + \frac{i}{3}$ mientras que la segunda vale $\frac{1}{3} + \frac{4i}{3}$. Podemos concluir que, como la integral entre el origen y $1 + i$ depende del camino elegido, la función $f(z) = |z|^2$ no tiene primitiva.

6. Encuentra primitivas para calcular las integrales

$$\int_{\gamma} z^2 \sin z dz \quad \text{y} \quad \int_{\gamma} ze^{iz} dz,$$

donde γ es el segmento vertical $[0, i]$ que une el origen y la unidad imaginaria.

Solución: Resolveremos la primera integral. En primer lugar, necesitamos encontrar una primitiva de $f(z) = z^2 \sin z$. Empezaremos buscando una primitiva

real de $f(x) = x^2 \sin x$. Integrando por partes,

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x dx &= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x dx \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x. \end{aligned}$$

Consideremos la función $F(z) = -z^2 \cos z + 2z \sin z + 2 \cos z$. Evidentemente F está definida en todo el plano complejo y es sencillo comprobar que $F'(z) = z^2 \sin z$. Ahora, por el teorema fundamental de la integración en contornos, si γ es un camino suave entre el origen y la unidad imaginaria,

$$\int_{\gamma} f = F(i) - F(0) = -i^2 \cos i + 2i \sin i + 2 \cos i - 2 \cos 0 = 3 \cosh 1 - 2 \sinh 1 - 2.$$

7. Demuestra la Proposición 5.5.7.

8. Sea f la función dada por

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}.$$

Consideremos los caminos $\gamma_1(t) = -1 + \frac{1}{2}e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma_2(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$ y $\gamma(t) = 2e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Usa el teorema de Cauchy para deducir que

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

9. Consideremos el camino γ_1 que consiste en una circunferencia de radio 1 centrada en el origen recorrida en sentido antihorario y la función $f(z) = 1/z$. Demuestra que $\int_{\gamma_1} f(z) dz = 2\pi i$.

Sea γ_2 un contorno cerrado cualquiera con $n(\gamma_2, 0) = 1$. Calcula $\int_{\gamma_2} f(z) dz$.

Solución: $\int_{\gamma_2} f = 2\pi i$.

10. Consideremos el dominio $D = \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$ y los caminos $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ ilustrados en la figura 5.3. Supongamos que

$$\int_{\gamma_1} f = 3 + 4i \quad \text{y que} \quad \int_{\gamma_2} f = 5 + 6i.$$

Calcula la integral $\int_{\gamma} f$.

Solución: Aplicaremos el teorema de Cauchy Generalizado a los contornos cerrados $\gamma, -\gamma_1, \gamma_2$. Solo hay dos puntos que no pertenecen a D : z_1, z_2 . Está claro que

$$\begin{aligned} n(\gamma, z_1) &= 1, & n(\gamma, z_2) &= -1, \\ n(-\gamma_1, z_1) &= -1, & n(-\gamma_1, z_2) &= 0, \\ n(\gamma_2, z_1) &= 0, & n(\gamma_2, z_2) &= 1, \end{aligned}$$

y por lo tanto, $n(\gamma, z) + n(-\gamma_1, z) + n(\gamma_2, z) = 0$ para todo $z \notin D$. Por el teorema de Cauchy generalizado, tenemos que

$$\int_{\gamma} f + \int_{-\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f = 0.$$

Reordenando, encontramos

$$\int_{\gamma} f = - \int_{-\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f = (3 + 4i) - (5 + 6i) = -2 - 2i.$$

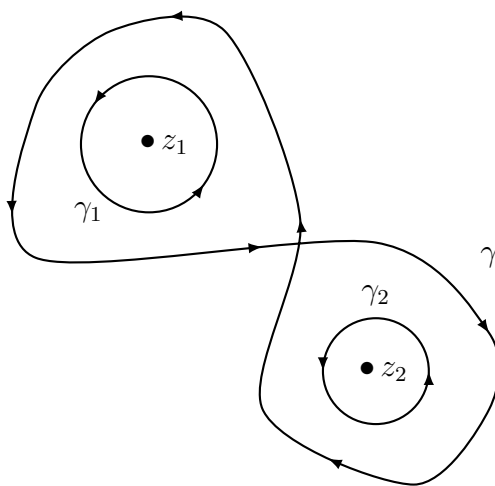


Figura 5.3:

Capítulo 6

Fórmula integral de Cauchy y teorema de Taylor

6.1. Introducción y objetivos

En este tema probaremos dos importantes resultados y veremos algunas de sus consecuencias. El primer resultado que enunciaremos y probaremos es la **fórmula integral de Cauchy**, uno de los hitos más remarcables del análisis complejo. Este teorema nos da una forma de calcular el valor de una función compleja en el interior de un disco conociendo solo sus valores en el contorno del disco. En este momento podemos empezar a darnos cuenta de la rigidez del análisis complejo en comparación con el análisis real.

La fórmula integral de Cauchy será clave para probar el **teorema de Taylor**, que establece que toda función holomorfa tiene un desarrollo en serie de potencias único: el desarrollo en serie de Taylor. En el tema 3 ya vimos que toda serie de potencias es holomorfa. El teorema de Taylor es una especie de recíproco de aquel resultado. En particular, esto implica que toda función holomorfa es de clase C^∞ y, además, analítica.

En la última sección del tema veremos tres consecuencias directas de la fórmula integral de Cauchy. La primera de ellas será la **desigualdad de Cauchy**, que nos permitirá acotar los valores de las derivadas de una función holomorfa en un disco a partir del valor de la función en el borde del disco.

La desigualdad de Cauchy nos permitirá probar el **teorema de Liouville**, que establece que toda función entera (holomorfa en todo el plano complejo) acotada es necesariamente constante.

Para finalizar el tema veremos una prueba del **teorema fundamental del álgebra** mucho más simple que la vista en el primer tema, que usa fuertemente el teorema de Liouville.

6.2. Fórmula integral de Cauchy

La fórmula integral de Cauchy es uno de los hitos más destacables del análisis complejo. Esta fórmula básicamente nos dice que podemos derivar una función si sabemos como integrarla. Esto explica en parte la simplicidad del análisis complejo en comparación con el análisis real. En particular, probaremos que si una función es derivable en el sentido complejo (holomorfa), entonces es infinitamente derivable de forma automática.

Teorema 6.2.1 (Fórmula integral de Cauchy en un disco). *Sea f una función holomorfa en el disco $D(z_0, R)$. Dado $0 < r < R$, consideremos el camino C_r dado por $C_r(t) = z_0 + re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Entonces, para todo $w \in D(z_0, r)$ tenemos*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - w} dz.$$

Demostración. Tomemos $w \in D(z_0, r)$ y consideremos la función

$$g(z) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w}.$$

La función g es holomorfa en el dominio $D = D(z_0, R) \setminus \{w\}$. Sea S_ε el círculo de centro w y radio $\varepsilon > 0$ parametrizado como

$$S_\varepsilon(t) = w + \varepsilon e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Para ε suficientemente pequeño, tanto C_r como S_ε están contenidos en D .

A continuación aplicaremos el teorema de Cauchy a los contornos S_ε y $-C_r$. Supongamos que $z \notin D$. Entonces o bien $|z - z_0| \geq R$ o bien $z = w$.

- En el primer caso, si $|z - z_0| \geq R$, tenemos que $n(S_\varepsilon, z) = n(C_r, z) = 0$.
- En el segundo caso, si $z = w$, entonces $n(S_\varepsilon, z) = 1$ y $n(C_r, z) = -1$.

Entonces, tenemos que $n(S_\varepsilon, z) + n(C_r, z) = 0$ para todo $z \notin D$. Por el teorema de Cauchy,

$$\int_{C_r} g(z) dz = \int_{S_\varepsilon} g(z) dz.$$

Por la definición de g , sabemos que

$$\lim_{z \rightarrow w} g(z) = f'(w).$$

Como $|f'(w)|$ tiene valor finito, tenemos que $g(z)$ está acotada para z lo suficientemente cerca de w . Es decir, existen $\delta > 0$ y $M > 0$ tales que si $0 < |z - w| < \delta$ entonces $|g(z)| < M$.

Entonces, si $\varepsilon < \delta$, el lema de estimación visto en el tema anterior implica que

$$\left| \int_{C_r} g(z) dz \right| = \left| \int_{S_\varepsilon} g(z) dz \right| \leq M 2\pi \varepsilon,$$

y como podemos tomar ε arbitrariamente pequeño, tenemos que

$$\int_{C_r} g(z) dz = 0.$$

Teniendo en cuenta que $g(z) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - w} dz &= \int_{C_r} \frac{f(w)}{z - w} dz \\ &= f(w) \int_{C_r} \frac{dz}{z - w} \\ &= f(w) 2\pi i n(C_r, w) \\ &= f(w) 2\pi i, \end{aligned}$$

ya que $n(C_r, w) = 1$. En conclusión,

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - w} dz.$$

□

Una primera consecuencia de la fórmula integral de Cauchy en un disco es que si conocemos el valor de una función a lo largo del camino cerrado C_r , entonces conocemos el valor de f en cualquier punto del interior del disco de frontera C_r . No existe ningún resultado análogo a este en el análisis real.

Como corolario de la fórmula integral de Cauchy en un disco tenemos el **teorema del valor medio**:

Corolario 6.2.2. *Sea $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en un abierto $U \subset \mathbb{C}$. Entonces, para todo $z \in U$ y todo $r > 0$ tal que $\bar{D}(z, r) \subset U$ tenemos que*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt.$$

Demostración. Solo hay que aplicar la fórmula integral de Cauchy en un disco al punto central $z = z_0$ y parametrizar la circunferencia como $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$. □

Recordamos que una curva cerrada γ es **simple** si para todo $z \notin \gamma$, $n(\gamma, z) \in \{0, 1\}$. Teniendo esto en cuenta, el teorema anterior puede generalizarse para obtener el siguiente:

Teorema 6.2.3 (Fórmula integral de Cauchy). *Sea f una función holomorfa en un dominio simplemente conexo D y sea γ una curva cerrada simple en D tal que $n(\gamma, w) = 1$. Entonces,*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - w} dz.$$

6.3. Series de Taylor

Empezaremos esta sección probando que una función holomorfa es automáticamente de clase C^∞ .

Teorema 6.3.1 (Teorema de Taylor). *Sea f una función holomorfa en un dominio D . Entonces existen todas las derivadas de orden superior de f en D y, en cualquier disco $D(z_0, R) \subset D$, f admite un desarrollo en serie de Taylor dado por*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Además, si $0 < r < R$ y $C_r(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, tenemos

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Esta última igualdad se conoce como **fórmula integral de Cauchy de orden superior**.

Demostración. En primer lugar, conviene recordar que para todo $w \in \mathbb{C}$, tenemos

$$1 + w + \dots + w^m = \frac{1 - w^{m+1}}{1 - w}.$$

Si ponemos $w = \frac{h}{z - z_0}$,

$$1 + \frac{h}{z - z_0} + \dots + \frac{h^m}{(z - z_0)^m} = \frac{1 - \left(\frac{h}{z - z_0}\right)^{m+1}}{1 - \frac{h}{z - z_0}} = \frac{1 - \left(\frac{h}{z - z_0}\right)^{m+1}}{z - z_0 - h} (z - z_0).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - (z_0 + h)} &= \frac{1}{z - z_0 - h} = \\ &= \frac{1}{z - z_0} + \frac{h}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{h^m}{(z - z_0)^{m+1}} + \frac{h^{m+1}}{(z - z_0)^{m+1}(z - z_0 - h)}. \end{aligned}$$

Fijemos h tal que $0 < |h| < R$ y supongamos por ahora que $|h| < r < R$. Entonces, usando la fórmula integral de Cauchy, tenemos

$$\begin{aligned} f(z_0 + h) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - (z_0 + h)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(z) \left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{h}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{h^m}{(z - z_0)^{m+1}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{h^{m+1}}{(z - z_0)^{m+1}(z - z_0 - h)} \right) dz \\ &= \sum_{n=0}^m a_n h^n + A_m, \end{aligned}$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

y

$$A_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)h^{m+1}}{(z - z_0)^{m+1}(z - z_0 - h)} dz.$$

A continuación probaremos que $A_m \rightarrow 0$ si $m \rightarrow \infty$. Como la función f es holomorfa en C_r , también está acotada. Por lo tanto, existe un $M > 0$ tal que para todo z en C_r , se tiene que $|f(z)| \leq M$.

Ahora, por la desigualdad triangular inversa, usando que $|h| < r = |z - z_0|$ para z en C_r , tenemos

$$|z - z_0 - h| \geq ||z - z_0| - |h|| = r - |h|.$$

Por el lema de estimación,

$$|A_m| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M|h|^{m+1}}{r^{m+1}(r - |h|)} 2\pi r = \frac{M|h|}{r - |h|} \left(\frac{|h|}{r}\right)^m.$$

Como $|h| < r$, $A_m \rightarrow 0$ si $m \rightarrow \infty$. Entonces,

$$f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n$$

para $|h| < R$ con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

ya que $|h| < r < R$. Notamos que la integral no varía para todo $r \in (0, R)$. Finalmente, si $h = z - z_0$, tenemos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

en $D(z_0, R)$ con las a_n indicadas previamente. El teorema de Abel implica que podemos derivar la serie término a término y que

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

□

Es importante notar que este teorema es falso en el caso del análisis real, ya que existen funciones de clase \mathcal{C}^∞ que no coinciden con su serie de Taylor.

Ejemplo 6.3.2. *Por ejemplo, consideremos la función*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Claramente f es de clase \mathcal{C}^∞ . Sin embargo, todas las derivadas de f en 0 son 0 y por lo tanto su serie de Taylor en 0 es 0. Como $f \not\equiv 0$ en un entorno del origen, vemos que f no coincide con su serie de Taylor.

Este ejemplo motiva la siguiente definición, que distingue el hecho de tener infinitas derivadas con coincidir con su serie de Taylor.

Definición 6.3.3 (Función analítica). *Sea $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ una función tal que para todo $z_0 \in D$ existe un entorno de z_0 tal que f coincide con su serie de Taylor. Decimos que una función f es **analítica** en D y lo denotaremos como $f \in \mathcal{C}^\omega(D)$.*

El teorema de Taylor demuestra que toda función holomorfa es analítica. Sin embargo, como hemos visto en el ejemplo anterior, existen funciones reales de clase \mathcal{C}^∞ que no son analíticas.

Proposición 6.3.4. *Si $\sum_{n \geq 0} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n \geq 0} b_n(z-z_0)^n$ para todo $z \in D(z_0, R)$, entonces $a_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Ejemplo 6.3.5. *Vamos a ver dos ejemplos de como usar la fórmula integral de Cauchy y la fórmula integral de Cauchy de orden superior para calcular integrales:*

1. *Vamos a calcular la integral*

$$\int_{\gamma} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz,$$

donde γ es la circunferencia $|z| = 3$. Descomponiendo en fracciones simples, vemos que

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1},$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz &= \\ &= \int_{\gamma} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-2} dz - \int_{\gamma} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-1} dz. \end{aligned}$$

Si aplicamos la fórmula integral de Cauchy en $z_0 = 1$ y $z_0 = 2$ respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-2} dz &= 2\pi i (\sin(\pi 2^2) + \cos(\pi 2^2)) = 2\pi i, \\ \int_{\gamma} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-1} dz &= 2\pi i (\sin(\pi 1^2) + \cos(\pi 1^2)) = -2\pi i, \end{aligned}$$

ya que tanto $z_0 = 1$ como $z_0 = 2$ están dentro del disco delimitado por γ y la función $\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)$ es analítica dentro de γ . En conclusión,

$$\int_{\gamma} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz = 2\pi i - (-2\pi i) = 4\pi i.$$

2. Calcularemos la integral

$$\int_{\gamma} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz,$$

donde γ es la circunferencia $|z| = 3$. Aplicando la fórmula de Cauchy de orden superior a la función $f(z) = e^{2z}$ en el punto $z_0 = -1$, tenemos

$$f^{(n)}(-1) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z+1)^{n+1}} dz.$$

En el caso $n = 3$, tenemos que $f'''(z) = 8e^{2z}$ y por tanto $f'''(-1) = 8e^{-2}$. Entonces,

$$8e^{-2} = \frac{3!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz.$$

En conclusión,

$$\int_{\gamma} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz = \frac{8\pi i e^{-2}}{3}.$$

En el siguiente vídeo vemos otro ejemplo de aplicación de la fórmula integral de Cauchy en el cálculo de integrales.

Vídeo Uso de la fórmula integral de Cauchy en el cálculo de integrales

6.4. Aplicaciones de la fórmula integral de Cauchy

Existe una gran cantidad de aplicaciones directas de la fórmula integral de Cauchy. En esta sección veremos tres de ellas: la desigualdad de Cauchy, el teorema de Liouville y el teorema fundamental del álgebra.

Empecemos enunciando y probando la desigualdad de Cauchy:

Teorema 6.4.1 (Desigualdad de Cauchy). *Sea f una función holomorfa en $D(z_0, R)$. Si $r \in (0, R)$ y $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \partial D(z_0, r)$, entonces para todo $n \geq 0$,*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{Mn!}{r^n}.$$

Demostración. Por la fórmula integral de Cauchy de orden superior, sabemos que

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz.$$

Ahora, usando el lema de estimación,

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &= \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r \\ &= \frac{Mn!}{r^n}. \end{aligned}$$

□

A continuación usaremos la desigualdad de Cauchy para probar el teorema de Liouville. Este teorema nos da una idea de la rigidez de las funciones holomorfas en todo el plano complejo \mathbb{C} . Esencialmente dice que las únicas funciones enteras y acotadas son las constantes.

Teorema 6.4.2 (Teorema de Liouville). *Sea f una función entera acotada en todo el plano complejo. Entonces f es constante.*

Demostración. Sea f una función entera acotada. Entonces existe $M > 0$ tal que $|f(z)| < M$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Tomemos $z_0 \in \mathbb{C}$. Como f es holomorfa en todo el plano complejo, también lo es en el disco $D(z_0, R)$ de centro z_0 y radio R para cualquier valor de R . Por la desigualdad de Cauchy, para todo $r \in (0, R)$ tenemos

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}.$$

Como podemos tomar R arbitrariamente grande, también podemos tomar r tan grande como queramos. De este modo, si $r \rightarrow \infty$, vemos que $|f'(z_0)| = 0$ para todo $z_0 \in \mathbb{C}$. Por lo tanto, f tiene que ser constante. \square

Aunque el teorema de Liouville es de gran importancia en si mismo, una consecuencia directa de este es el teorema fundamental del álgebra. En uno de los vídeos del Tema 1 dimos una demostración elemental del teorema fundamental del álgebra. Sin embargo, aquella demostración era bastante larga y complicada. El teorema de Liouville nos permitirá probarlo de forma mucho más sencilla.

Teorema 6.4.3 (Teorema fundamental del álgebra). *Sea $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ un polinomio de grado $n \geq 1$ a coeficientes complejos. Entonces existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $p(\alpha) = 0$.*

Demostración. Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que la ecuación

$$p(z) = 0$$

no tiene soluciones complejas. Es decir, que $p(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Si $p(z) \neq 0$ en todo el plano complejo, tenemos que la función $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ es una función entera. Probaremos que f es constante y por lo tanto, por el teorema de Liouville, será constante.

Si $z \neq 0$, tenemos que

$$\frac{p(z)}{z^n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n},$$

de donde deducimos que

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{p(z)}{z^n} = 1.$$

Entonces existe $K > 0$ tal que si $|z| > K$ entonces,

$$\left| \frac{p(z)}{z^n} \right| \geq \frac{1}{2}.$$

Esto implica que si $|z| > K$ tenemos que

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq \frac{2}{|z^n|} \leq \frac{2}{K^n}.$$

Hemos probado que $f(z)$ está acotada si $|z| > K$. A continuación veremos que esto sigue siendo cierto si $|z| \leq K$. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|z_0| \leq K$. Consideremos $C_r(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, el camino circular de centro z_0 y radio r . Si elegimos un r lo suficientemente grande, podemos asumir que C_r está contenido en $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > K\}$. En este caso, si z es un punto de C_r , entonces $|z| > K$. Como z está en C_r , tenemos que

$$|f(z)| \leq \frac{2}{K^n}.$$

Por la desigualdad de Cauchy con $n = 0$, tenemos que

$$|f(z_0)| \leq \frac{2}{K^n}.$$

En conclusión, $|f(z)| \leq 2/K^n$ para todo $z \in \mathbb{C}$, de forma que $1/p(z)$ está acotada en todo el plano complejo. Por el teorema de Liouville, $1/p(z)$ es constante, lo que supone una contradicción. \square

Aplicando de forma inductiva el teorema fundamental del álgebra, podemos probar el siguiente corolario:

Corolario 6.4.4. *Sea $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ un polinomio de grado $n \geq 1$ a coeficientes complejos. Entonces, existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tales que*

$$p(z) = (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n).$$

6.4.1. La fórmula integral de Cauchy para funciones no holomorfas

Aunque en las hipótesis de la fórmula integral se requiere que la función en cuestión sea holomorfa, en ciertas ocasiones puede esquivarse este requerimiento y aplicarla a funciones no holomorfas. En el siguiente vídeo se explica este hecho y se ilustra con un ejemplo.

Vídeo Fórmula de Cauchy para funciones no holomorfas

6.5. Problemas

1. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int_{\gamma} \frac{2}{z^2 - 1} dz$, donde γ es la circunferencia de centro 1 y radio $r = \frac{1}{2}$ orientada positivamente.

b) $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{(z + 1)^7} dz$, donde γ es la circunferencia de centro 9 y radio $r = 5$ orientada positivamente.

Solución:

a) En primer lugar, descomponemos el integrando en fracciones simples:

$$\frac{2}{z^2 - 1} = \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z + 1}.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\gamma} \frac{2}{z^2 - 1} dz = \int_{\gamma} \frac{dz}{z - 1} - \int_{\gamma} \frac{dz}{z + 1}.$$

En primer lugar, por la fórmula integral de Cauchy, tenemos que

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - 1} = 2\pi i.$$

En segundo lugar, como la función $\frac{1}{z + 1}$ es holomorfa dentro del disco delimitado por γ , tenemos

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z + 1} = 0.$$

En conclusión,

$$\int_{\gamma} \frac{2}{z^2 - 1} dz = 2\pi i.$$

b) Usando la fórmula integral de Cauchy de orden superior se ve que

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{(z + 1)^7} dz = \frac{2\pi i \sin 1}{6!}.$$

2. Demuestra la Proposición 6.3.4.

Indicación: Considera la diferencia de las dos series.

3. Encuentra el desarrollo en serie de Taylor de la función $f(z) = \sin^2 z$ alrededor del 0. ¿Cuál es su radio de convergencia?

Solución: Ya sabemos que

$$\sin^2 z = \frac{1 - \cos 2z}{2}$$

y que

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sin^2 z &= \frac{1 - \cos 2z}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 4^n}{2(2n)!} z^{2n}. \end{aligned}$$

Como vimos en el tema 4, el radio de convergencia de la serie de Taylor del coseno es $R = \infty$, de modo que en este caso también tenemos que $R = \infty$. Alternativamente, también podemos calcular el radio de convergencia usando el criterio del cociente:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1}}{2(2(n+1))!} \frac{2(2n)!}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{2n(2n+1)} = 0.$$

4. Encuentra el desarrollo de Taylor alrededor de 0 de $f(z) = \frac{1}{2z+1}$ y su radio de convergencia.

Solución: Usando el valor de la suma de una serie geométrica, tenemos

$$\frac{1}{1+2z} = 1 - 2z + 4z^2 - 8z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-2z)^n.$$

Para calcular el radio de convergencia de esta serie de potencias basta con usar el criterio de la raíz:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n} = 2,$$

de forma que $R = \frac{1}{2}$.

5. Encuentra el desarrollo en serie de Taylor de $f(z) = e^{z^2}$ alrededor de 0 y su radio de convergencia.

Solución:

$$e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!},$$

y el radio de convergencia es $R = \infty$.

6. Calcula la serie de Taylor de la función $f(z) = \text{Log}(1+z)$ alrededor del 0. ¿Cuál es su radio convergencia?
7. Sea f una función entera tal que $|f(z)| \leq K|z|^k$ para algún real $K > 0$ y algún entero $k \geq 0$. Demuestra que que f es un polinomio de grado $n \leq k$.

Indicación: Calcula los coeficientes de z^n , $n \geq k$, de la serie de Taylor de f alrededor del 0.

8. Demuestra que toda función polinómica de grado $n \geq 1$ es exhaustiva.
9. Calcula la integral

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} dz.$$

Solución: Consideremos la función $f(z) = e^z$. Por la fórmula de Cauchy de orden superior aplicada sobre el disco $D(0, 1)$ en el punto $z = 0$, tenemos que

$$f^{(n-1)}(0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{(z-0)^n} dz.$$

Como la derivada de la exponencial es ella misma y en $z = 0$ tiene valor 1, obtenemos que

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}.$$

10. Calcula la integral

$$\int_{|z|=2} \frac{z^n}{(1-z)^m} dz.$$

Solución: Consideremos la función $f(z) = z^n$. Aplicando la fórmula de Cauchy de orden superior sobre el disco $D(0, 2)$ en el punto $z = 1$, que está contenido en el disco, tenemos

$$f^{(m-1)}(1) = (-1)^m \frac{(m-1)!}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-1)^m} dz.$$

Está claro que la derivada $(m-1)$ -ésima de $f(z) = z^n$ es

$$f^{(m-1)}(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } n < m-1, \\ n(n-1)\cdots(n-m+2)z^{n-m+1}, & \text{si } n \geq m-1. \end{cases}$$

El caso $n \geq m-1$, podemos reescribirlo como

$$f^{(m-1)}(z) = \frac{n!}{(n-m+1)!} z^{n-m+1},$$

y evaluando en $z = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} (-1)^m \frac{2\pi i}{(m-1)!} f^{(m-1)}(1) &= (-1)^m 2\pi i \frac{n!}{(n-m+1)!(m-1)!} \\ &= (-1)^m 2\pi i \binom{n}{m-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral que queríamos calcular es

$$\int_{|z|=2} \frac{z^n}{(1-z)^m} dz = \begin{cases} 0, & \text{si } n < m-1, \\ (-1)^m 2\pi i \binom{n}{m-1}, & \text{si } n \geq m-1. \end{cases}$$

Capítulo 7

Series de Laurent y singularidades

7.1. Introducción y objetivos

El principal objetivo de este tema es **estudiar y aprender a clasificar los distintos tipos de singularidades** que puede tener una función compleja. Existen tres tipos de singularidades: las evitables, los polos y las esenciales. Las **singularidades evitables** son aquellas que pueden corregirse simplemente dando un valor adecuado a la función en la singularidad. Los **polos** son el análogo a las asíntotas en análisis real, es decir, aquellos puntos en que la función tiene límite infinito. Las **singularidades esenciales** son las más difíciles de estudiar ya que son aquellas en las que no existe el límite de la función en ese punto.

La principal herramienta para la clasificación de singularidades son las **series de Laurent**. Podemos entender las series de Laurent como una generalización de las series de potencias donde admitimos potencias negativas. Así como en el caso de las funciones holomorfas en un dominio podemos encontrar un desarrollo en serie de Taylor en un disco, el teorema de Laurent permite asegurar que si una función tiene una singularidad aislada en un punto, podemos encontrar un desarrollo en serie de Laurent en una corona alrededor de la singularidad.

7.2. Series de Laurent

Ya hemos visto que toda función holomorfa f puede expresarse como una serie de potencias: la serie de Taylor. Es decir, dada una función f holomorfa en un dominio D y $z_0 \in D$, podemos escribir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Esta expresión es válida en un disco $D(z_0, R)$ para algún $R > 0$. La idea detrás de las series de Laurent consiste en generalizar esto admitiendo potencias negativas de $(z - z_0)$. Veremos que esto es extremadamente útil cuando trabajamos con funciones con singularidades.

Definición 7.2.1 (Serie de Laurent). Una **serie de Laurent** es una serie de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad (7.1)$$

entendiendo esta serie doble como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

La primera pregunta que surge es: ¿cuándo converge la serie (7.1)? Consideremos una serie de la forma

$$b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_nz^{-n} + \dots$$

Efectuando el cambio $z = 1/w$ vemos que esta serie es convergente, y por lo tanto define una función holomorfa, en $|z| > R$. Si tomamos series de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_nz^n,$$

la parte con $n \geq 0$ es convergente en una región de la forma $|z| < R_2$ y la parte con $n < 0$ converge en $|z| > R_1$. Si se da el caso $R_1 < R_2$, entonces la serie de potencias define una función holomorfa en la corona.

El siguiente teorema establece que, recíprocamente, toda función f holomorfa en una corona $C = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ admite un desarrollo en serie con potencias positivas y negativas (serie de Laurent) de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Teorema 7.2.2 (Teorema de Laurent). Sea f una función holomorfa en una corona

$$C = C(a, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - a| < r_2\},$$

donde $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$. Entonces podemos escribir f como una serie de Laurent en la corona C :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - a)^{-n}. \quad (7.2)$$

Además, si $C_1(t) = a + r_1e^{it}$ y $C_2(t) = a + r_2e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$, tenemos que

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{(w - a)^{-n+1}} dw, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

En el siguiente vídeo se da la demostración del teorema de Laurent.

Vídeo Demostración del teorema de Laurent

Es importante resaltar que en este caso no es cierto que

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

ya que no sabemos si la función es holomorfa en z_0 (puede que ni siquiera esté definida en z_0).

Definición 7.2.3 (Serie de Laurent de una función en un punto). *Diremos que la serie doble (7.2) es la **serie de Laurent de f en z_0** . Decimos que*

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$$

es la **parte principal** de la serie de Laurent, mientras que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

es la **parte ordinaria** de la serie de Laurent.

El siguiente resultado justifica la definición anterior, ya que demuestra que la serie de Laurent es única.

Proposición 7.2.4. *Consideremos dos series de Laurent tales que*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

para todo $z \in C(z_0, R_1, R_2)$. Entonces, $a_n = b_n \forall n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Restando ambos miembros de la ecuación anterior vemos que es suficiente probar que si

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = 0,$$

para todo z en la corona $C(z_0, R_1, R_2)$, entonces $a_n = 0$ para todo entero n .

Consideremos la función

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = 0.$$

Por el teorema de Laurent,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

y, como el integrando es cero, tenemos que $a_n = 0$. □

Consideremos una función $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y tomemos dos coronas diferentes $C(z_0, R_1, R_2)$ y $C(z'_0, R'_1, R'_2)$ contenidas en D . Por el teorema de Laurent, tenemos un desarrollo en serie de Laurent en cada corona:

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n, \quad \sum_{n \geq 0} a'_n (z - z'_0)^n$$

Como las dos coronas son diferentes, es razonable pensar que los coeficientes a_n y a'_n pueden ser diferentes. En los siguientes ejemplos veremos algunas funciones a las que les pasa esto mismo.

Dada una función f holomorfa en una corona, queremos encontrar la serie de Laurent de f , es decir, queremos calcular los coeficientes a_n de la serie. Una primera idea sería usar el teorema de Laurent y encontrar los coeficientes de la serie de Laurent calculando las integrales correspondientes. Sin embargo, esta opción es habitualmente muy ineficiente. En vez de esto, usaremos el hecho de que la serie de Laurent en una corona es única. Por lo tanto, si podemos ver que f coincide con una expresión de la forma (7.1) en una corona $C(z_0, R_1, R_2)$, ésta será su serie de Laurent.

Ejemplo 7.2.5. Consideremos la función

$$f(z) = e^z + e^{\frac{1}{z}}.$$

Teniendo en cuenta que

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

vemos que

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}, \quad \text{si } z \neq 0.$$

Sumando estos dos desarrollos,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \cdots + \frac{1}{(-k)! z^k} + \cdots + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{z} + 2 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^k}{k!} + \cdots,$$

donde

$$a_n = \frac{1}{n!} \text{ si } n \geq 1, \quad a_0 = 2, \quad a_{-n} = \frac{1}{n!} \text{ si } n \geq 1.$$

Notemos que este desarrollo en serie de Laurent es válido si $z \neq 0$, es decir, en la corona $C(0, R_1, R_2)$ donde $R_1 = 0$ y $R_2 = \infty$.

Veamos ahora un ejemplo en el que la serie de Laurent tiene un número finito de potencias negativas.

Ejemplo 7.2.6. Queremos calcular la serie de Laurent en $z_0 = 0$ de la función

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{1-z}.$$

Por un lado, está claro que $\frac{1}{z}$ ya es una serie de Laurent en 0 donde el único coeficiente no nulo es $a_{-1} = 1$. Esta serie converge cuando $z \neq 0$.

Por otro lado, sabemos que la suma de una serie geométrica es

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

siempre que $|z| < 1$.

Sumando ambas expresiones, tenemos

$$f(z) = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n,$$

que converge en la corona $C(0, 0, 1)$.

En el siguiente ejemplo estudiaremos una función que tiene tres series de Laurent en el 0 en tres coronas diferentes.

Ejemplo 7.2.7. Consideremos la función

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}.$$

Veremos tres series de Laurent diferentes en tres coronas distintas alrededor del origen.

Observemos que podemos escribir

$$\frac{1}{z-1} = \frac{-1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (7.3)$$

que converge si $|z| < 1$.

Por otro lado, también tenemos

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z \left(1 - \frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} z^{-n} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{z^n}, \quad (7.4)$$

que converge si $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, es decir, si $|z| > 1$.

De forma similar, podemos ver que

$$\frac{1}{z-2} = \frac{-1}{2-z} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad (7.5)$$

siempre que $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, i.e. $|z| < 2$.

Por otro lado, también podemos escribir

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n \geq 1} \frac{2^{n-1}}{z^n}, \quad (7.6)$$

que converge cuando $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$, es decir, cuando $|z| > 2$.

- Usando las relaciones (7.3) y (7.5), podemos escribir

$$\begin{aligned} f(z) &= -\sum_{n \geq 0} z^n + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(-1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n. \end{aligned}$$

Esta expresión converge en la corona $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq |z| < 1\}$.

- En segundo lugar, usando las expresiones (7.4) y (7.5), tenemos que

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{2}\right)^n \\ &= \dots + \frac{1}{z^n} + \dots + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{4} + \dots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \dots \end{aligned}$$

en la corona $C(0, 1, 2)$.

- Finalmente, usando las igualdades (7.4) y (7.6), tenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{z^n} - \sum_{n \geq 1} \frac{2^{n-1}}{z^n} \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{1 - 2^{n-1}}{z^n} \end{aligned}$$

en la corona $C(0, 2, \infty)$.

En los ejemplos que hemos visto hasta ahora hemos buscado series de Laurent en coronas centradas en el origen. Si queremos buscar desarrollos de Laurent en coronas centradas en un punto z_0 cualquiera, suele ser conveniente efectuar un cambio de variable mediante la traslación $w = z - z_0$, calcular el desarrollo de Laurent en la nueva variable w y finalmente deshacer el cambio de variable.

A continuación veremos un ejemplo en el que la serie de Laurent no estará centrada en el origen.

Ejemplo 7.2.8. Consideremos la función

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}.$$

A continuación calcularemos la serie de Laurent de f en la corona $C(1, 0, \infty)$. En primer lugar efectuamos el cambio de variable $w = z - 1$, de modo que $z = w + 1$. Nuestra función es ahora

$$\frac{e^{1+w}}{w^2}.$$

Como $e^{1+w} = ee^w = e \sum_{n \geq 0} \frac{w^n}{n!}$, podemos escribir

$$\frac{e^{1+w}}{w^2} = \frac{e}{w^2} \sum_{n \geq 0} \frac{w^n}{n!} = \frac{e}{w^2} + \frac{e}{w} + \frac{e}{2!} + \frac{e}{3!}w + \frac{e}{4!}w^2 + \cdots + \frac{e}{n!}z^{n-2} + \cdots,$$

siempre que $w \neq 0$. Deshaciendo el cambio de coordenadas, tenemos

$$f(z) = \frac{e}{(z-1)^2} + \frac{e}{z-1} + \frac{e}{2!} + \frac{e}{3!}(z-1) + \frac{e}{4!}(z-1)^2 + \cdots + \frac{e}{n!}(z-1)^{n-2} + \cdots,$$

en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, es decir, en la corona $C(1, 0, \infty)$.

7.3. Singularidades

En esta sección introduciremos los distintos tipos de singularidades: las singularidades evitables, los polos y las singularidades esenciales. La principal herramienta que tenemos en este momento para distinguir las distintas singularidades es la serie de Laurent, en particular su parte principal (los términos con potencia negativa).

Empezaremos presentando la noción de singularidad:

Definición 7.3.1 (Singularidad). Decimos que f tiene una **singularidad** en z_0 si no es holomorfa en z_0 .

Por ejemplo, los puntos en los que una función no está definida son singularidades. Consideremos la función $f(z) = \frac{1}{z}$. Como no está definida en $z_0 = 0$, f tiene una singularidad en el origen.

Definición 7.3.2 (Singularidad aislada). Decimos que una singularidad z_0 de f está **aislada** si existe $R > 0$ tal que f es holomorfa en la corona $C(z_0, 0, R) = D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.

La función $f(z) = \frac{1}{z}$ tiene una singularidad aislada en $z_0 = 0$, ya que f es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

En esta asignatura solo estudiaremos singularidades aisladas, aunque debemos tener en cuenta que existen funciones con singularidades no aisladas. Consideremos por ejemplo la función

$$f(z) = \tan \frac{1}{z}.$$

Esta función tiene una singularidad no aislada en $z = 0$, ya que es el límite de la sucesión de singularidades

$$\frac{2}{\pi}, \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{5\pi}, \dots$$

Supongamos entonces que tenemos una función f con una singularidad aislada en $z_0 \in \mathbb{C}$. Entonces, f es holomorfa en la corona $C(z_0, 0, R)$ para algún $R > 0$. Entonces, por el teorema de Laurent, podemos escribir f como

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n \geq 1} b_n (z - z_0)^{-n},$$

en la corona $C(z_0, 0, R)$. Consideremos la parte principal de la serie de Laurent:

$$\sum_{n \geq 1} b_n (z - z_0)^{-n}.$$

Podemos distinguir tres posibilidades:

- la parte principal no tiene **ningún término**,
- la parte principal tiene un **número finito de términos**,
- la parte principal tiene un **número infinito de términos**.

Cada uno de estos tres casos corresponde a un tipo distinto de singularidad, como veremos a continuación.

7.3.1. Singularidades evitables

Sea f una función con una singularidad aislada en z_0 tal que la parte principal de su serie de Laurent no tiene ningún término. En este caso, para $z \in C(z_0, 0, R)$, podemos escribir

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots.$$

Notemos que el radio de convergencia de esta serie de potencias es como mínimo R , y por lo tanto podemos extender f a una función holomorfa en el disco $D(z_0, R)$. Este hecho motiva la siguiente definición:

Definición 7.3.3 (Singularidad evitable). *Sea f una función con una singularidad aislada en z_0 . Diremos que la singularidad es **evitable** si la parte principal de la serie de Laurent no tiene ningún término.*

Veamos un ejemplo de función con una singularidad evitable:

Ejemplo 7.3.4 (Singularidad evitable). *Consideremos la función*

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Claramente f tiene una singularidad aislada en $z_0 = 0$, ya que f no está definida en el origen. Sin embargo, sabemos que

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

siempre que $z \neq 0$. En cambio, el radio de convergencia de la serie de potencias es $R = \infty$. En efecto, si definimos $f(0) = 1$, vemos que f es holomorfa en todo el plano complejo. Por lo tanto, la singularidad de f en el origen es evitable.

El nombre de evitable está mucho más claro después de ver este ejemplo, ya que hemos “evitado” la singularidad simplemente definiendo adecuadamente la función en ese punto.

7.3.2. Polos

El segundo tipo de singularidad, los polos, son aquellas en las que la parte principal de la serie de Laurent tiene un número finito de términos.

Definición 7.3.5 (Polo). *Sea f una función con una singularidad aislada en z_0 tal que la parte principal de la serie de Laurent de f en z_0 tiene un número finito de términos:*

$$f(z) = \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{b_1}{z - z_0} + \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

en la corona $C(z_0, 0, R)$, donde $b_m \neq 0$. En este caso decimos que f tiene un **polo de orden m** en z_0 . Un polo de orden 1 recibe el nombre de **polo simple**.

A continuación veremos algunos ejemplos de funciones con singularidades aisladas de tipo polo.

Ejemplo 7.3.6 (Polo de orden 3). *Consideremos la función*

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$$

definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es evidente que f tiene una singularidad aislada en $z_0 = 0$. Podemos escribir

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z} + \frac{1}{5!} z - \frac{1}{7!} z^3 + \dots$$

En conclusión, f tiene un polo de orden 3 en $z_0 = 0$.

Ejemplo 7.3.7 (Polo simple). *La función*

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$$

tiene una singularidad en $z = -1$ y en $z = -2$. Vamos a clasificar la singularidad en $z = -2$. Para ello, calcularemos la serie de Laurent en $z = -2$ efectuando el cambio de variable $w = z + 2$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z+1)(z+2)} &= \frac{w-2}{(w-1)w} = \frac{2-w}{w} \frac{1}{1-w} \\ &= \frac{2-w}{w} (1+w+w^2+w^3+\dots) \\ &= \frac{2}{w} + 1 + w + w^2 + \dots \\ &= \frac{2}{z+2} + 1 + (z+2) + (z+2)^2 + \dots \end{aligned}$$

Por lo tanto, $z = -2$ es un polo de orden 1 o un polo simple. La serie de Laurent converge en la corona $C(-2, 0, 1)$.

Las singularidades evitables y los polos son los tipos de singularidad más manejables. De hecho, a menudo consideraremos funciones holomorfas en un dominio D salvo en un conjunto finito de puntos, donde puede haber singularidades evitables o polos. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 7.3.8 (Función meromorfa). *Una función $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en D salvo en un conjunto finito donde puede haber singularidades evitables o polos recibe el nombre de **función meromorfa**.*

Por ejemplo, consideremos dos funciones $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ tales que g tiene un número finito de ceros en D . Entonces, la función

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

es una función meromorfa. Esta función tendrá polos en los ceros de g que no sean ceros de f .

7.3.3. Singularidades esenciales

Definición 7.3.9 (Singularidad esencial). *Sea $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ una función con una singularidad aislada en $z_0 \in D$. Decimos que z_0 es una **singularidad esencial** si la parte principal de la serie de Laurent de f en z_0 tiene infinitos términos.*

Veamos un ejemplo de una función con una singularidad esencial:

Ejemplo 7.3.10 (Singularidad esencial). *Consideremos la función*

$$f(z) = \sin \frac{1}{z}$$

definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. La serie de Laurent de esta función alrededor del cero es

$$\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \cdots .$$

Por lo tanto, la singularidad en $z_0 = 0$ es esencial.

Las singularidades esenciales son las más difíciles de estudiar. El siguiente teorema nos da una idea de lo salvaje que puede ser el comportamiento de una función holomorfa alrededor de una singularidad esencial.

Teorema 7.3.11 (Teorema de Casorati–Weierstrass). *Una función holomorfa toma valores arbitrariamente cercanos a cualquier valor complejo en un entorno de una singularidad esencial.*

El enunciado de este teorema nos dice que la imagen de cualquier entorno de una singularidad esencial es densa en \mathbb{C} .

Demostración. Si el teorema no fuera cierto, existiría un complejo $B \in \mathbb{C}$ y un $\delta > 0$ tal que $|f(z) - B| > \delta$ para todo z en un entorno de la singularidad esencial z_0 . En particular,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - B} = 0 .$$

Es decir, que la función $g(z) = \frac{z - z_0}{f(z) - B}$ tiene una singularidad evitable en z_0 . En un disco D alrededor del punto z_0 podemos escribir

$$\frac{z - z_0}{f(z) - B} = H(z)(z - z_0)^n ,$$

con $n \geq 1$, donde H es una función holomorfa en D y $H(z_0) \neq 0$. Por tanto,

$$f(z) = B + \frac{(z - z_0)^{1-n}}{H(z)} .$$

Por lo tanto, si $n > 1$ la función f tiene un polo en z_0 y si $n = 1$ f tiene una singularidad evitable. En cualquier caso, la singularidad no puede ser esencial, lo que es una contradicción. \square

Es importante resaltar que si una función es holomorfa en un entorno de z_0 y está acotada en un entorno de este punto, la singularidad no puede ser ni un polo ni esencial. Esto implica que en la definición de singularidad evitable podemos rebajar esta condición. Si la función está acotada en un entorno de z_0 automáticamente tiene límite en z_0 y se puede extender a una función holomorfa.

En el siguiente vídeo se muestran varios ejemplos de cálculo de series de Laurent y clasificación de singularidades.

Vídeo Ejemplos de cálculo de series de Laurent y singularidades

7.4. Problemas

1. Encuentra la serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{1}{z-3}$$

en la corona $C(0, 3, \infty)$.

2. Calcula la serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$$

en la corona $C(0, 0, 1)$.

3. Encuentra la serie de Laurent de la función

$$f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$$

centrada en el origen en la corona más grande posible.

4. Calcula la serie de Laurent alrededor del 0 de la función

$$f(z) = \cos \frac{1}{z}$$

en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

5. Encuentra la serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-3}$$

en las coronas $C(0, 0, 1)$, $C(0, 1, 3)$ y $C(0, 3, \infty)$.

6. Considera la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}.$$

Calcula la serie de Laurent de f en las coronas $C(0, 0, 1)$ y $C(1, 0, 1)$.

7. Considera la función

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}.$$

Encuentra la serie de Laurent de f en las siguientes coronas: $C(1, 0, \infty)$, $C(0, 0, 1)$ y $C(0, 1, \infty)$.

8. Encuentra los polos y sus órdenes de las siguientes funciones:

$$a) f(z) = \frac{1}{z^2 + 1},$$

$$b) g(z) = \frac{1}{z^4 + 16},$$

$$c) h(z) = \frac{1}{z^4 + 2z^2 + 1},$$

$$d) k(z) = \frac{1}{z^2 + z - 1}$$

9. Indica el tipo de singularidad en el origen de las siguientes funciones:

$$a) f(z) = \sinh \frac{1}{z},$$

$$b) g(z) = \frac{\sin^2 z}{z^3},$$

$$c) h(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2}.$$

10. Sea D un dominio del plano complejo y $z_0 \in D$ y f una función holomorfa y acotada en $D \setminus \{z_0\}$. Demuestra que la singularidad z_0 es evitable.

Capítulo 8

Teorema de los residuos

8.1. Introducción y objetivos

En este tema introduciremos una de las herramientas más potentes que nos ofrece el análisis complejo: los residuos. Estos residuos tienen un gran interés tanto teórico como práctico, ya que son de gran utilidad para calcular integrales tanto complejas como reales.

En la primera sección del tema estudiaremos con más detalle los conceptos de **cero y polo de una función compleja**. En concreto, veremos cómo calcular los ceros y polos de una función y su orden.

La segunda sección del tema está destinada a enunciar y probar el **teorema de los residuos**. Para ello se definirá el concepto de residuo de una función en un punto y se verá su estrecha relación con la serie de Laurent y con la integración compleja. Finalmente, el teorema de los residuos nos dará una forma efectiva de calcular la integral de una función compleja alrededor de un camino que encierre singularidades si conocemos el valor de los residuos de dichas singularidades.

Pese al gran interés que puede tener el teorema de los residuos al transformar un problema de integración en un problema de cálculo de residuos, su utilidad será mínima si no tenemos métodos efectivos de **cálculo de residuos**. Por lo tanto, esta última sección está destinada a dar herramientas que permitan un cálculo ágil del residuo de una función en un polo.

8.2. Ceros y polos de funciones holomorfas

Recordamos que decimos que una función f presenta una singularidad en un punto z_0 si f no es holomorfa en z_0 . Solo vamos a considerar los casos en que la singularidad sea un polo. En los ejemplos que hemos visto hasta ahora, deducíamos que una función tiene un polo en z_0 porque podíamos escribirla como

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

con $q(z_0) = 0$, de forma que f no está definida en el punto z_0 . Por lo tanto, tiene sentido empezar estudiando los ceros de las funciones holomorfas.

Definición 8.2.1 (Cero de una función). *Sea f una función compleja definida en un dominio D . Decimos que f tiene un **cero** en $z_0 \in D$ si $f(z_0) = 0$.*

Definición 8.2.2 (Cero aislado de una función). *Sea f una función definida en un dominio D y sea z_0 un cero de f . Decimos que z_0 es un **cero aislado** si existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D$ tal que $0 < |z - z_0| < \varepsilon$.*

En el siguiente vídeo se muestra que los ceros de una función holomorfa siempre están aislados. Una consecuencia importante de este hecho es el principio de continuación analítica.

Vídeo El principio de continuación analítica

En virtud de los resultados mostrados en el vídeo anterior, solo estamos interesados en los ceros aislados. Sea $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa con un cero aislado en z_0 . Por el teorema de Taylor, podemos escribir f como un desarrollo en serie en un entorno de z_0 . Es decir,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n,$$

para todo z en un cierto entorno abierto de z_0 .

Definición 8.2.3 (Cero de orden m). *Decimos que f tiene un **cero de orden m** en z_0 si $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$ pero $a_m \neq 0$. Decimos que z_0 es un **cero simple** si es un cero de orden 1.*

Ejemplo 8.2.4. *A continuación veremos algunos ejemplos de ceros de funciones.*

1. La función $f(z) = z^3$ tiene un cero de orden 3 en $z_0 = 0$.
2. La función $f(z) = z(z + 4i)^2$ tiene un cero de orden 2 en $z_0 = -4i$.
3. Consideremos la función $f(z) = z^2 + 9$. Teniendo en cuenta que $z^2 + 9 = (z + 3i)(z - 3i)$, está claro que f tiene ceros simples en $\pm 3i$.

Ya sabemos que los coeficientes a_n del desarrollo en serie de Taylor pueden calcularse como

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Por lo tanto, f tiene un cero de orden m en z_0 si y solo si $f^{(k)}(z_0) = 0$ para todo $0 \leq k \leq m - 1$ pero $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. En concreto, si $f(z_0) = 0$ pero $f'(z_0) \neq 0$, f tiene un cero simple en z_0 .

Ejemplo 8.2.5. *Veamos como usar esto para identificar los ceros de una función.*

1. Consideremos la función holomorfa $f(z) = \sin z$. Ya sabemos que f presenta ceros en los puntos $k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Como $f'(k\pi) = \cos k\pi = (-1)^k \neq 0$, deducimos que todos sus ceros son simples.
2. Sea $f(z) = 1 - \cos z$, que tiene ceros en los puntos $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Pero $f'(z) = \sin z$ y $f'(2k\pi) = 0$, mientras que $f''(2k\pi) = \cos 2k\pi = 1 \neq 0$, de modo que todos los ceros de f son de orden dos.

Lema 8.2.6. Sea f una función holomorfa en un dominio D con un cero de orden m en $z_0 \in D$. Entonces, existe un disco abierto $D(z_0, r)$ alrededor de z_0 tal que

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

para todo $z \in D(z_0, r)$, donde g es una función holomorfa en este disco tal que $g(z_0) \neq 0$.

Demostración. Podemos escribir

$$f(z) = a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots = (z - z_0)^m \sum_{n \geq 0} a_{n+m}(z - z_0)^n,$$

donde $a_m \neq 0$. Tomemos

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} a_{n+m}(z - z_0)^n.$$

Entonces, g es holomorfa en un disco abierto $D(z_0, r)$ y $g(z_0) \neq 0$, como queríamos probar. \square

Lema 8.2.7. Consideremos la función $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, donde

- p es holomorfa y $p(z_0) \neq 0$,
- q es holomorfa y tiene un cero de orden m en z_0 .

Entonces, f tiene un polo de orden m en z_0 .

Demostración. De acuerdo con el lema anterior, podemos escribir $q(z) = (z - z_0)^m h(z)$, donde h es holomorfa y $h(z_0) \neq 0$. Definamos $g(z) = \frac{p(z)}{h(z)}$. Entonces g es holomorfa en z_0 , y por lo tanto tiene desarrollo en serie de Taylor alrededor de z_0 en un disco $D(z_0, r)$:

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{p(z)}{q(z)} \\
 &= \frac{p(z)}{(z - z_0)^m h(z)} \\
 &= \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \\
 &= \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \\
 &= \frac{a_0}{(z - z_0)^m} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{m+1}} + \frac{a_2}{(z - z_0)^{m+2}} + \dots
 \end{aligned}$$

Además, $a_0 = g(z_0) = \frac{p(z_0)}{h(z_0)} \neq 0$, ya que $p(z_0) \neq 0$. Por lo tanto, f tiene un polo de orden m en z_0 . \square

Ejemplo 8.2.8. Veamos a continuación algunos ejemplos de aplicación de este lema.

1. Consideremos la función

$$f(z) = \frac{\sin 3z}{(z - 1)^2}.$$

Vemos que f tiene un polo de orden dos en $z = 1$, ya que $\sin 3 \neq 0$ mientras que $(z - 1)^2$ tiene un cero de orden dos en $z = 1$.

2. Consideremos la función

$$f(z) = \frac{z + 5}{\sin z}.$$

Tenemos que f tiene un polo simple en $z = k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$, ya que $\sin z$ tiene ceros simples en $z = k\pi$ para cada $k \in \mathbb{Z}$, mientras que $z + 5 \neq 0$ para $z = k\pi$.

8.3. El teorema de los residuos

Iniciaremos esta sección introduciendo el concepto de residuo de una función en una singularidad aislada.

Definición 8.3.1 (Residuo de una función en un punto). Sea f una función holomorfa en un dominio D salvo en una singularidad aislada z_0 con serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n \geq 1} b_n (z - z_0)^{-n}$$

en $C(z_0, 0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R\} \subset D$. Definimos el **residuo de f en z_0** como $\text{Res}(f, z_0) = b_1$. Es decir, el residuo de f en una singularidad aislada z_0 es el coeficiente de $(z - z_0)^{-1}$ del desarrollo en serie de Laurent.

Por el teorema de Laurent, podemos calcular el residuo usando la expresión

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(z) dz,$$

donde $C_r(t) = z_0 + re^{it}$, con $0 < r < R$ y $r \in [0, 2\pi]$, es un camino circular de radio r alrededor de z_0 recorrido en sentido antihorario. Es precisamente esta expresión la que muestra la estrecha relación que existe entre los residuos y la integración de funciones complejas.

Definición 8.3.2 (Camino cerrado simple). *Un camino cerrado simple es un contorno cerrado γ tal que para todo punto $z \notin \operatorname{Im} \gamma$, se tiene que $n(\gamma, z) = 0$ o $n(\gamma, z) = 1$. Si $n(\gamma, z) = 1$, decimos que z está **dentro** de γ .*

Por lo tanto, un camino cerrado simple es un contorno cerrado que da una única vuelta en sentido antihorario alrededor de sus puntos interiores. Una vez hemos introducido estos conceptos, podemos enunciar y probar el principal resultado de este tema.

Teorema 8.3.3 (Teorema de los residuos). *Sea D un dominio del plano complejo y γ un camino cerrado simple contenido en D . Sea f una función meromorfa en D con un conjunto finito z_1, \dots, z_n de polos dentro de γ . Entonces,*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}(f, z_j).$$

Demostración. Demostraremos el teorema de los residuos aplicando astutamente el teorema de Cauchy generalizado. Como D es abierto, para cada $j = 1, \dots, n$ podemos encontrar caminos circulares

$$S_j(t) = z_j + r_j e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

centrados en los puntos z_j , con radios r_j , recorridos en sentido antihorario y contenidos en D de forma que cada camino S_j contiene una única singularidad, la z_j .

Consideremos el conjunto $D' = D \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$. En primer lugar, probaremos que la colección de caminos

$$-\gamma, S_1, \dots, S_n$$

satisface las hipótesis del teorema de Cauchy generalizado, es decir, que la suma de los índices de todos ellos respecto a cualquier punto fuera de D' vale cero.

En primer lugar debemos notar que

$$n(-\gamma, z) = n(S_j, z) = 0$$

para todo $z \notin D$. Por lo tanto las hipótesis del teorema se satisfacen para los puntos fuera de D . Falta verlo para los puntos de D que no són de D' , es decir, los polos z_1, \dots, z_n . Como cada polo z_j está dentro de γ , tenemos que

$$n(-\gamma, z_j) = -n(\gamma, z_j) = -1.$$

Además,

$$n(S_k, z_j) = \delta_{jk}.$$

Por lo tanto,

$$n(-\gamma, z_j) + n(S_1, z_j) + \cdots + n(S_n, z_j) = 0.$$

Entonces, por el teorema de Cauchy generalizado,

$$\int_{-\gamma} f + \int_{S_1} f + \cdots + \int_{S_n} f = 0.$$

Por el teorema de Laurent, tenemos que

$$\text{Res}(f, z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_j} f(z) dz.$$

En conclusión,

$$\int_{\gamma} f = \int_{S_1} f + \cdots + \int_{S_n} f = 2\pi i (\text{Res}(f, z_1) + \cdots + \text{Res}(f, z_n)),$$

como queríamos probar. \square

Es importante destacar que en la demostración del teorema no hemos usado en ningún momento que las singularidades sean polos. En conclusión, el teorema es cierto para cualquier tipo de singularidad. Sin embargo, nosotros no nos preocuparemos del caso de las singularidades esenciales, que es más delicado por la naturaleza salvaje de este tipo de singularidad.

Una de las consecuencias más importantes del teorema de los residuos es el principio del argumento. En el siguiente vídeo se enuncia, demuestra y da una interpretación geométrica del principio del argumento. También se enuncia y demuestra un corolario directo del principio del argumento: el teorema de Rouché.

Vídeo El principio del argumento

8.4. Cálculo de residuos

El teorema de los residuos nos ofrece una forma de calcular integrales complejas en dominios que contengan singularidades. Pero para aprovechar este resultado necesitamos métodos eficientes para calcular residuos. En esta sección veremos algunos métodos de cálculo de residuos.

En algunas ocasiones serán necesarias manipulaciones *ad hoc* para calcular la serie de Laurent de una función. Sin embargo, hay casos en los que podrá calcularse de forma más sistemática.

En primer lugar, recordemos que si una función f tiene un desarrollo en serie de Laurent de la forma

$$f(z) = \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n,$$

con $b_m \neq 0$, entonces decimos que f tiene un polo de orden m en z_0 . Un polo simple es un polo de orden 1.

Notemos que si podemos escribir f como $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ donde p y q son funciones holomorfas y $p(z) \neq 0$ cuando $q(z) = 0$, entonces los polos de f coinciden con los ceros de q . Además el orden de cada polo de f coincide con el orden del correspondiente cero de q .

Lema 8.4.1. *Sea f una función meromorfa en un dominio D con una singularidad en $z_0 \in D$. Si f tiene un polo simple en z_0 , entonces*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

Por otro lado, si $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ donde p, q son holomorfas, $p(z_0) \neq 0$ y $q(z_0) = 0$ pero $q'(z_0) \neq 0$, entonces

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Demostración. En primer lugar, si f presenta un polo simple en z_0 , f tiene un desarrollo en serie de Laurent en cierta corona $C(z_0, 0, R)$ de la forma

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n.$$

Por lo tanto,

$$(z - z_0)f(z) = b_1 + \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^{n+1},$$

de donde deducimos que

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z),$$

como queríamos ver.

En el segundo caso, por hipótesis, f tiene un polo simple en z_0 . Por el caso anterior, y usando que $q(z_0) = 0$, el residuo es

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)p(z)}{q(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{p(z)}{\left(\frac{q(z) - q(z_0)}{z - z_0}\right)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

□

Veamos con un ejemplo como aplicar el lema anterior.

Ejemplo 8.4.2. *Consideremos la función*

$$f(z) = \frac{\cos \pi z}{1 - z^3}.$$

Es fácil comprobar que f tiene un polo simple en $z = 1$ y cumple las hipótesis del lema anterior. Por lo tanto,

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \frac{\cos \pi}{(-3) \cdot 1} = \frac{1}{3}.$$

El lema anterior puede generalizarse para tratar polos de orden m .

Lema 8.4.3. *Sea f una función meromorfa en un dominio D con un polo de orden m en $z_0 \in D$. Entonces,*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-z_0)^m f(z)) \right).$$

Demostración. Si f tiene un polo de orden m en z_0 , entonces su desarrollo en serie de Laurent alrededor de z_0 es de la forma

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{b_1}{z-z_0} + \sum_{n \geq 0} a_n (z-z_0)^n,$$

para todo $0 < |z-z_0| < R$, para cierto $R > 0$. Entonces,

$$(z-z_0)^m f(z) = b_m + (z-z_0)b_{m-1} + \cdots + (z-z_0)^{m-1}b_1 + \sum_{n \geq 0} a_n (z-z_0)^{m+n}.$$

Derivando la expresión anterior $m-1$ veces, llegamos a

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-z_0)^m f(z)) = (m-1)!b_1 + \sum_{n \geq 0} \frac{(m+n)!}{(n+1)!} a_n (z-z_0)^{n+1}.$$

dividiendo entre $(m-1)!$ y tomando el límite cuando $z \rightarrow z_0$, obtenemos el resultado deseado. \square

A continuación veremos un ejemplo de utilización del lema anterior para calcular el residuo de una función en un polo.

Ejemplo 8.4.4. *Consideremos la función*

$$f(z) = \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^3.$$

Está claro que f presenta un polo de orden 3 en $z = 1$. Veamos cómo calcular el residuo de f en $z = 1$. Notemos que

$$(z-1)^3 f(z) = (z+1)^3.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} ((z-1)^3 f(z)) = \frac{6}{2} (z+1) = 3(z+1).$$

Tomando el límite cuando $z \rightarrow 1$, tenemos que

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} 3(z + 1) = 6.$$

Comprobemos usando la serie de Laurent que efectivamente $\operatorname{Res}(f, 1) = b_1 = 6$. En primer lugar, efectuemos el cambio de variable $w = z - 1$. Entonces, $z = w + 1$ y podemos escribir

$$\begin{aligned} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^3 &= \frac{(w+2)^3}{w^3} \\ &= \frac{w^3 + 6w^2 + 12w + 8}{w^3} \\ &= \frac{8}{w^3} + \frac{12}{w^2} + \frac{6}{w} + 1 \\ &= \frac{8}{(z-1)^3} + \frac{12}{(z-1)^2} + \frac{6}{z-1} + 1, \end{aligned}$$

de donde vemos que efectivamente f tiene un polo de orden 3 en $z = 1$ y que $b_1 = 6$, como ya sabíamos.

Hasta ahora hemos visto dos ejemplos en los que podemos aplicar los lemas previos para calcular fácilmente el residuo en un polo. Sin embargo, en ocasiones, el cálculo del residuo en un polo no es tan simple. A continuación veremos un ejemplo de ello.

Ejemplo 8.4.5. Consideremos la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}.$$

Esta función presenta singularidades donde se anula el denominador, es decir en $z = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Usaremos la serie de Laurent para calcular el residuo en $z = 0$. Usando la serie de Taylor de la función \sin , tenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2 \sin z} \\ &= \frac{1}{z^2 \left(z - \frac{z^3}{6} + \dots \right)} \\ &= \frac{1}{z^3 \left(1 - \frac{z^2}{6} + \dots \right)^{-1}} \\ &= \frac{1}{z^3 \left(1 + \frac{z^2}{6} + \dots \right)} \\ &= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{6z} + \dots \end{aligned}$$

En el desarrollo anterior hemos omitido deliberadamente los términos de orden superior ya que en el cálculo de residuos solo estamos interesados en aquellos términos que contribuyan al coeficiente de $\frac{1}{z}$. En este caso, tenemos

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{6}.$$

Consideremos ahora los polos en $z = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Podríamos efectuar el cambio de variable $w = z - k\pi$ y calcular el desarrollo en serie de Laurent. Sin embargo, podemos usar la segunda parte del lema 3. En primer lugar, hay que darse cuenta de que podemos escribir

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

donde $p(z) = 1$ y $q(z) = z^2 \sin z$. Si $k \neq 0$, $k\pi$ es un cero simple de $\sin z$, ya que $\cos k\pi \neq 0$, y por lo tanto $k\pi$ es un cero simple de $q(z)$. Entonces,

$$\operatorname{Res}(f, k\pi) = \frac{p(k\pi)}{q'(k\pi)} = \frac{(-1)^k}{(k\pi)^2},$$

donde hemos usado que $q'(z) = 2z \sin z + z^2 \cos z$, de modo que $q'(k\pi) = (k\pi)^2 \cos k\pi = (-1)^k (k\pi)^2$.

8.5. Problemas

1. Encuentra los polos y calcula el residuo en cada uno de la función

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z^2)}.$$

Solución: La función f es holomorfa en todo el plano complejo salvo donde se anula el denominador, es decir cuando $z = 0, 1, -1$. Notemos que los tres ceros son simples. Por lo tanto, en virtud del Lema 3,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{1}{z(1-z^2)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1-z^2} = 1, \\ \operatorname{Res}(f, 1) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{z(1-z^2)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-1}{z(1+z)} = \frac{-1}{2}, \\ \operatorname{Res}(f, -1) &= \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{1}{z(1-z^2)} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{-1}{z(1-z)} = \frac{-1}{2}. \end{aligned}$$

2. Encuentra los polos y calcula el residuo en cada uno de la función

$$f(z) = \tan z.$$

3. Encuentra los polos y calcula el residuo en cada uno de la función

$$f(z) = \frac{z}{1+z^4}.$$

4. Encuentra los polos y calcula el residuo en cada uno de la función

$$f(z) = \left(\frac{z+1}{z^2+1} \right)^2.$$

5. Encuentra las singularidades y calcula el residuo en cada una de ellas de la función

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}.$$

6. Encuentra las singularidades y calcula el residuo en cada una de ellas de la función

$$f(z) = \frac{\sin^2 z}{z^4}.$$

7. Considera la función

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)^2}.$$

Vemos que f tiene singularidades en $z = 0$ y $z = 1$. Encuentra el desarrollo en serie de Laurent de f en 0 y en 1 y úsalos para determinar el orden de cada polo y el residuo de f en cada uno.

Usa los lemas 2, 3 y 4 para calcular los polos y sus residuos de forma alternativa.

Solución: Tenemos que

$$\frac{1}{z(1-z)^2} = \frac{1}{z}(1+2z+3z^2+\dots) = \frac{1}{z} + 2 + 3z + 4z^2 + \dots.$$

Vemos que f tiene un polo simple en $z = 0$. El residuo $\text{Res}(f, 0)$ es el coeficiente del término z^{-1} en la serie de Laurent, por lo tanto

$$\text{Res}(f, 0) = 1.$$

A continuación encontraremos el desarrollo en serie de Laurent de f entorno a $z = 1$. Empezaremos introduciendo el cambio de variable $w = z - 1$, es decir, $z = 1 + w$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(1-z)^2} &= \frac{1}{w^2(1+w)} \\ &= \frac{1}{w^2(1-(-w))} \\ &= \frac{1}{w^2}(1-w+w^2-w^3+\dots) \\ &= \frac{1}{w^2} - \frac{1}{w} + 1 - w + w^2 - \dots \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-1} + 1 - (z-1) + (z-1)^2 - \dots, \end{aligned}$$

de donde deducimos que f tiene un polo de orden dos en $z = 1$. El residuo $\text{Res}(f, 1)$ es el coeficiente del término $(z - 1)^{-1}$ en la serie de Laurent, por lo tanto

$$\text{Res}(f, 1) = -1.$$

Veamos ahora un método alternativo para calcular estos residuos, usando los resultados obtenidos en este tema. Por el Lema 2, la función f tiene un polo simple en $z = 0$ y un polo de orden dos en $z = 1$. Usando el Lema 3, tenemos que

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{1}{z(1-z)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(1-z)^2} = 1.$$

Por otro lado, de acuerdo con el Lema 4,

$$\text{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left((z-1)^2 \frac{1}{z(1-z)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-1}{z^2} = -1.$$

8. Sean $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ dos funciones holomorfas en un dominio D tales que f tiene un cero de orden m en $z_0 \in D$ y g tiene un cero de orden n en $z_0 \in D$. Demuestra que la función $f \cdot g$ tiene un cero de orden $m + n$ en z_0 .

9. Considera el camino $\Gamma_r(t) = re^{it}$ con $r > 0$ y $t \in [0, 2\pi]$. Calcula las siguientes integrales:

$$\int_{\Gamma_4} \frac{1}{z^2 - 5z + 6} dz, \quad \int_{\Gamma_{5/2}} \frac{1}{z^2 - 5z + 6} dz.$$

10. Calcula la integral

$$\int_{\gamma} \frac{e^{az}}{1+z^2} dz,$$

donde $a \in \mathbb{R}$ y γ es el camino $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Solución: Consideremos la función

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+z^2}.$$

Observemos que podemos escribir la función como

$$f(z) = \frac{e^{az}}{(z+i)(z-i)},$$

de donde deducimos que f tiene dos polos simples en $z = \pm i$. Calculando los residuos,

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, i) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i)e^{az}}{(z-i)(z+i)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{az}}{z+i} = \frac{e^{ia}}{2i}, \\ \text{Res}(f, -i) &= \lim_{z \rightarrow -i} \frac{(z-i)e^{az}}{(z-i)(z+i)} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{e^{az}}{z-i} = \frac{-e^{-ia}}{2i}. \end{aligned}$$

Aplicando ahora el teorema de los residuos, obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \frac{e^{az}}{1+z^2} dz &= 2\pi i (\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i)) \\ &= 2\pi i \left(\frac{e^{ia}}{2i} - \frac{e^{-ia}}{2i} \right) \\ &= 2\pi i \sin a .\end{aligned}$$

Capítulo 9

Aplicaciones del teorema de los residuos

9.1. Introducción y objetivos

En el tema anterior hemos introducido el concepto de residuo de una función en una singularidad y hemos enunciado y demostrado el teorema de los residuos. También vimos algunas técnicas de cálculo de residuos. El objetivo de este tema es ver distintas **aplicaciones del teorema de los residuos**, especialmente para el cálculo de integrales complejas y reales o la suma de series de números reales. Dada la naturaleza aplicada de este tema, usaremos un enfoque esencialmente práctico, describiendo las técnicas empleadas usando ejemplos ilustrativos de los métodos utilizados.

En primer lugar veremos unos primeros ejemplos en los que el cálculo de residuos nos permitirá **calcular integrales** de funciones complejas.

En la segunda sección del tema veremos que, integrando en contornos adecuados, el teorema de los residuos nos permite calcular algunas **integrales reales impropias** tratándolas como integrales complejas a lo largo del eje real.

En la tercera sección estudiaremos cómo el teorema de los residuos nos da herramientas para calcular **integrales trigonométricas** reales. Esto puede hacerse mediante un cambio de variable adecuado que transforme la integral real en una integral compleja sobre una circunferencia alrededor del origen.

Finalmente, veremos cómo el teorema de los residuos puede emplearse para calcular la suma de algunas **series de números reales**. En este caso, veremos que es habitual usar contornos cuadrados alrededor del origen.

9.2. Primeros ejemplos

En esta primera sección veremos algunos ejemplos de aplicación del teorema de los residuos al cálculo de integrales. Consideremos los siguientes caminos circulares

entorno al origen, de radios 2 y 4 respectivamente, recorridos en sentido antihorario:

$$\begin{aligned}\gamma_2(t) &= 2e^{it}, & t \in [0, 2\pi], \\ \gamma_4(t) &= 4e^{it}, & t \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

Consideremos la función

$$f(z) = \frac{3}{z-1}.$$

Está claro que f tiene un único polo en $z = 1$. A partir de la definición de f tenemos que $\text{Res}(f, 1) = 3$. Como el polo en $z = 1$ está en el interior de la curva γ_2 , por el teorema de los residuos, tenemos que

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = 2\pi i \text{Res}(f, 1) = 6\pi i.$$

De forma similar, como $z = 1$ está dentro de la curva γ_4 , tenemos

$$\int_{\gamma_4} f(z)dz = 2\pi i \text{Res}(f, 1) = 6\pi i.$$

Consideremos ahora la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + (i-3)z - 3i}.$$

Para encontrar los polos, debemos factorizar el denominador:

$$z^2 + (i-3)z - 3i = (z-3)(z+i).$$

Por lo tanto, f tiene dos polos simples en $z = -i$ y $z = 3$. Mediante el Lema 3 del tema anterior, podemos ver que

$$\text{Res}(f, -i) = \frac{-1}{3+i}, \quad \text{Res}(f, 3) = \frac{1}{3+i}.$$

Consideremos ahora la integral

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

El polo $z = -i$ está dentro de γ_2 , mientras que el polo $z = 3$ está fuera. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} f(z)dz &= 2\pi i \text{Res}(f, -i) \\ &= 2\pi i \frac{-1}{3+i} \\ &= \frac{-\pi}{5}(1+i3).\end{aligned}$$

Calculemos ahora la integral $\int_{\gamma_4} f(z)dz$. En este caso, ambos polos están dentro del camino circular. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_4} f(z)dz &= 2\pi i(\operatorname{Res}(f, -i) + \operatorname{Res}(f, 3)) \\ &= 2\pi i\left(\frac{-1}{3+i} + \frac{1}{3+i}\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

9.3. Integrales reales impropias

Una de las aplicaciones más interesantes del teorema de los residuos es su utilidad para calcular integrales reales impropias cuando no existen vías sencillas para calcularlas usando solo el análisis real. Empezaremos dejando claros algunos conceptos sobre integrales impropias. Queremos calcular integrales de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx, \quad (9.1)$$

donde f es una función real de variable real. En primer lugar estableceremos qué significa exactamente la integral anterior. Diremos que la integral (9.1) existe si los dos límites iterados

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-a}^b f(x)dx, \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^b f(x)dx$$

existen y convergen al mismo valor. En este caso, definimos la integral (9.1) como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a, b \rightarrow \infty} \int_{-a}^b f(x)dx.$$

Puede probarse que si la integral (9.1) existe, entonces es igual a su **valor principal**, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x)dx.$$

Sin embargo, hay que ser cuidadoso ya que existen funciones para las cuales el valor principal $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x)dx$ existe, mientras que la integral (9.1) no existe. Consideremos por ejemplo la función $f(x) = x$. En este caso,

$$\int_{-r}^r f(x)dx = \int_{-r}^r xdx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_{-r}^r = \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2} = 0,$$

que converge a 0 cuando $r \rightarrow \infty$. Sin embargo, tenemos que

$$\int_{-a}^b f(x)dx = \int_{-a}^b xdx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_{-a}^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2},$$

cuyo límite cuando $a, b \rightarrow \infty$ no existe.

El siguiente lema nos proporciona un criterio para asegurar la convergencia de la integral (9.1).

Lema 9.3.1. *Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua y supongamos que existen constantes $K > 0$, $C > 0$ y $r > 1$ tales que para $|x| \geq K$ se tiene que*

$$|f(x)| \leq \frac{C}{|x|^r}.$$

Entonces la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ existe y coincide con su valor principal $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x)dx$.

En primer lugar, notemos que la integral de contorno compleja $\int_{[-R, R]} f$ coincide con la integral real $\int_{-R}^R f$. Para ver esto, podemos parametrizar el intervalo $[-R, R]$ como $\gamma(t) = t$, con $t \in [-R, R]$. Entonces,

$$\int_{[-R, R]} f = \int_{-R}^R f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_{-R}^R f(t)dt.$$

Antes de describir el método que nos ofrece el teorema de los residuos para calcular integrales impropias, veremos con todo detalle un ejemplo ilustrativo. Queremos calcular la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx.$$

Notemos que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left| \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} \right| \leq \frac{C}{x^4},$$

de modo que en virtud del Lema 1, la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$$

existe y coincide con su valor principal

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx.$$

Consideremos la función compleja

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)},$$

y denotemos por $[-R, R]$ al segmento que une los puntos $-R$ y R , que podemos parametrizar como t , con $t \in [-R, R]$. Por lo tanto, tenemos

$$\int_{-R}^R \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = \int_{[-R, R]} f(z) dz.$$

Para poder utilizar el teorema de los residuos necesitaremos un camino cerrado. Consideremos el camino semicircular $S_R(t) = Re^{it}$, con $t \in [0, \pi]$. De este modo podemos fabricar el camino cerrado $\Gamma_R = [-R, R] + S_R$ (este camino tiene la forma de una letra "D" girada en sentido antihorario un cuarto de vuelta). Si queremos usar este camino Γ_R junto con el teorema de los residuos necesitaremos saber qué singularidades hay dentro del camino. Notemos que

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} = \frac{1}{(z - i)(z + i)(z - 2i)(z + 2i)},$$

de modo que vemos que f tiene polos simples en los puntos $z = \pm i$ y $z = \pm 2i$. Si consideramos $R > 2$, los polos $z = i, 2i$ están dentro de Γ_R , mientras que los polos $z = -i, -2i$ están fuera de Γ_R independientemente del valor de R . Calculemos entonces los residuos en $z = i, 2i$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, i) &= \lim_{z \rightarrow i} (z - i)f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z + i)(z - 2i)(z + 2i)} \\ &= \frac{1}{6i}. \\ \operatorname{Res}(f, 2i) &= \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i)f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{1}{(z - i)(z + i)(z + 2i)} \\ &= \frac{-1}{12i}. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de los residuos, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{[-R, R]} f(z) dz + \int_{S_R} f(z) dz &= \int_{\Gamma_R} f(z) dz \\ &= 2\pi i (\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, 2i)) \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{6i} - \frac{1}{12i} \right) \\ &= \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Solo nos falta calcular la integral $\int_{S_R} f(z) dz$. Para acotar esta integral usaremos el Lema de estimación. Tomemos $z \in S_R$. Tenemos que $|z| = R$. Entonces,

$$|(z^2 + 1)(z^2 + 4)| \geq (R^2 - 1)(R^2 - 4),$$

de modo que

$$\left| \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} \right| \leq \frac{1}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)}.$$

Por el Lema de estimación,

$$\begin{aligned} \left| \int_{S_R} f(z) dz \right| &= \frac{1}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)} \ell(S_R) \\ &= \frac{\pi R}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)}. \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $R \rightarrow \infty$,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{S_R} f(z) dz \right| = 0.$$

En conclusión, tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = \frac{\pi}{6}.$$

9.3.1. Método general

Del ejemplo anterior, podemos deducir el método general para evaluar integrales impropias del tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

1. Comprobar que la función f satisface las hipótesis del Lema 1.
2. Construir un camino Γ_R adecuado (habitualmente en forma de D).
3. Encontrar los polos de la función f y calcular los residuos de los polos que estén dentro del camino Γ_R .
4. Aplicar el teorema de los residuos para escribir la integral $\int_{\Gamma_R} f(z) dz$.
5. Descomponer la integral como la integral sobre $[-R, R]$ y la integral sobre S_R y usar el Lema de estimación para demostrar que la integral sobre S_R tiende a cero cuando $R \rightarrow \infty$.

En función del ejemplo específico que estemos considerando, es probable que este método requiera ciertas modificaciones o adaptaciones al caso concreto en cuestión.

En el siguiente vídeo se muestra otro ejemplo de aplicación del teorema de los residuos al cálculo de integrales reales impropias.

Vídeo Aplicación del teorema de los residuos en el cálculo de integrales reales impropias

9.4. Integrales trigonométricas

Otra aplicación destacable del teorema de los residuos es el cálculo de integrales reales del tipo

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos t, \sin t) dt, \quad (9.2)$$

donde Q es una función cualquiera (habitualmente un polinomio).

El primer paso consiste en transformar la integral (9.2) en una integral compleja. Consideremos el cambio de variable $z = e^{it}$. Entonces,

$$\cos t = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin t = \frac{z - z^{-1}}{2i}.$$

Mediante esta transformación, el intervalo $[0, 2\pi]$ se convierte en la circunferencia unidad $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Finalmente, tenemos que $dz = ie^{it} dt = iz dt$. Entonces,

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos t, \sin t) dt = \int_{\gamma} Q\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{1}{iz} dz.$$

Ahora, en principio, podemos evaluar la integral anterior buscando los polos de la función

$$Q\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{1}{iz}$$

y calculando los residuos de los polos que estén dentro de la circunferencia γ y aplicando el teorema de los residuos.

Para ilustrar este método usaremos un par de ejemplos.

Ejemplo 9.4.1. *Queremos calcular la integral*

$$\int_0^{2\pi} (\cos^3 t + \sin^2 t) dt.$$

Consideremos el cambio de variable $z = e^{it}$, de modo que $dt = \frac{dz}{iz}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\cos^3 t + \sin^2 t) dt &= \int_{\gamma} \left(\left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^3 + \left(\frac{z - z^{-1}}{2i} \right)^2 \right) \frac{1}{iz} dz \\ &= \int_{\gamma} \left(\frac{z^3}{8} + \frac{3z}{8} + \frac{3z^{-1}}{8} + \frac{z^{-3}}{8} - \frac{z^2}{4} + \frac{1}{2} - \frac{z^{-2}}{4} \right) \frac{1}{iz} dz \\ &= \int_{\gamma} \frac{1}{i} \left(\frac{z^2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3z^{-2}}{8} + \frac{z^{-4}}{8} - \frac{z}{4} + \frac{z^{-1}}{2} - \frac{z^{-3}}{4} \right) dz. \end{aligned}$$

La función dentro de la integral tiene un único polo de orden 4 en $z = 0$ con residuo $\frac{1}{2i}$. Por lo tanto,

$$\int_0^{2\pi} (\cos^3 t + \sin^2 t) dt = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

Ejemplo 9.4.2. Queremos calcular la integral

$$\int_0^{2\pi} \cos t \sin t dt.$$

Aplicamos el cambio de variable $z = e^{it}$, de modo que $dt = \frac{dz}{iz}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos t \sin t dt &= \int_{\gamma} \frac{1}{4i} (z + z^{-1})(z - z^{-1}) \frac{1}{iz} dz \\ &= \int_{\gamma} \frac{-1}{4} (z^2 - z^{-2}) dz \\ &= \int_{\gamma} \frac{-1}{4} \left(z - \frac{1}{z^3} \right) dz. \end{aligned}$$

Notemos que la función del integrando tiene un único polo en $z = 0$ de orden 3, cuyo residuo es cero. Por lo tanto, la integral que queríamos calcular es

$$\int_0^{2\pi} \cos t \sin t dt = 0.$$

Es importante destacar que el método descrito puede adaptarse fácilmente a integrales en intervalos distintos al $[0, 2\pi]$ simplemente modificando la parametrización de la circunferencia. Por ejemplo, para calcular la integral

$$\int_0^{\pi} Q(\cos t, \sin t) dt,$$

podemos usar el cambio de variable $z = e^{2it}$, que transforma el intervalo $[0, \pi]$ en la circunferencia unidad recorrida en sentido antihorario.

9.5. Suma de series

Recordamos que $\cot \pi z = \cos \pi z / \sin \pi z$. Por lo tanto, la función $\cot \pi z$ tiene polos en los puntos donde $\sin \pi z = 0$, es decir, cuando $z = n \in \mathbb{Z}$. Como

$$\frac{d}{dz}(\sin \pi z) = \pi \cos \pi z,$$

que no se anula cuando $z = n$. Por lo tanto, $\cot \pi z$ tiene un polo simple en $z = n \in \mathbb{Z}$. El residuo en cada uno de los polos es

$$\text{Res}(\cot \pi z, n) = \frac{\cos \pi n}{\pi \cos \pi n} = \frac{1}{\pi}.$$

Este hecho sugiere un método para calcular la suma de series de la forma

$$\sum_{n \geq 1} a_n.$$

Sea f una función meromorfa definida en \mathbb{C} tal que $f(n) = a_n$. Consideremos la función $f(z) \cot \pi z$. Entonces, si $f(n) \neq 0$, tenemos

$$\operatorname{Res}(f(z) \cot \pi z, n) = \frac{a_n}{\pi}.$$

Por lo tanto, podemos usar el teorema de los residuos para calcular la suma de la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$. Vamos a aplicarlo para calcular la suma de la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

Antes de proceder, debemos abordar un par de detalles técnicos. En primer lugar necesitamos elegir un contorno adecuado sobre el que integrar. Como vamos a usar el Lema de estimación a lo largo de este contorno, necesitaremos acotar la función $|f(z) \cot \pi z|$. En segundo lugar, la función f puede tener polos que debemos tener en consideración. En nuestro ejemplo concreto, para calcular la suma de la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$

usaremos la función $f(z) = \frac{1}{z^2}$, que tiene un polo en el origen.

En esta ocasión, en vez de usar un contorno semicircular como en los casos anteriores, en este caso emplearemos un contorno cuadrado. Denotemos por C_N el cuadrado de vértices

$$\begin{aligned} & \left(N + \frac{1}{2}\right) - i \left(N + \frac{1}{2}\right) \quad , \quad \left(N + \frac{1}{2}\right) + i \left(N + \frac{1}{2}\right) \quad , \\ & - \left(N + \frac{1}{2}\right) + i \left(N + \frac{1}{2}\right) \quad , \quad - \left(N + \frac{1}{2}\right) - i \left(N + \frac{1}{2}\right) \quad . \end{aligned}$$

Notemos que C_N es un cuadrado centrado entorno al origen cuyos lados tienen una longitud de $2N + 1$.

Lema 9.5.1. *Existe un real $M > 0$ tal que $|\cot \pi z| \leq M$ para todo N y para todo $z \in C_N$.*

Demostración. El cuadrado C_N tiene dos lados horizontales paralelos al eje real y dos lados verticales paralelos al eje imaginario. Consideremos en primer lugar los lados horizontales de C_N . Sea $z = x + iy$ un punto de uno de los dos lados horizontales de C_N , de modo que $|y| \geq \frac{1}{2}$. Entonces,

$$\begin{aligned} |\cot \pi z| &= \left| \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| \\ &\leq \left| \frac{|e^{i\pi z}| + |e^{-i\pi z}|}{|e^{i\pi z}| - |e^{-i\pi z}|} \right| \\ &\leq \left| \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{-\pi y} - e^{\pi y}} \right| \\ &\leq \coth |\pi y| \\ &\leq \coth \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

ya que $|y| \geq \frac{1}{2}$.

Tomemos ahora un punto z de unos de los lados verticales de C_N . Entonces,

$$z = \pm \left(N + \frac{1}{2} \right) + iy,$$

de modo que

$$\begin{aligned} |\cot \pi z| &= \left| \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| \\ &= \left| \frac{e^{2\pi iz} + 1}{e^{2\pi iz} - 1} \right| \\ &= \left| \frac{e^{i\pi - 2\pi y} + 1}{e^{i\pi - 2\pi y} - 1} \right| \\ &= \left| \frac{-e^{-2\pi y} + 1}{-e^{-2\pi y} - 1} \right| \\ &= \left| \frac{1 - e^{-2\pi y}}{1 + e^{-2\pi y}} \right| \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

En conclusión,

$$|\cot \pi z| \leq \max \left\{ 1, \coth \frac{\pi}{2} \right\},$$

para todo $z \in C_N$. □

En lugar de enunciar un teorema general sobre el uso del teorema de los residuos para calcular sumar infinitas, usaremos un ejemplo ilustrativo del método. Queremos calcular la suma de la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

Consideremos la función $f(z) = \frac{1}{z^2}$ y el producto de funciones

$$f(z) \cot \pi z = \frac{\cot \pi z}{z^2} = \frac{\cos \pi z}{z^2 \sin \pi z}.$$

Este producto tiene polos allí donde se anule el denominador, lo que sucede cuando $z^2 \sin \pi z = 0$, es decir, cuando $z = n \in \mathbb{Z}$. Observemos que si $n \neq 0$, tenemos un polo simple, mientras que si $n = 0$ tenemos un polo de orden 3.

Calculemos en primer lugar el residuo si $n \neq 0$. Por el Lema 3 del Tema 8, tenemos que

$$\operatorname{Res} \left(\frac{\cot \pi z}{z^2}, n \right) = \frac{\cos \pi n}{\pi n^2 \cos \pi n + 2n \sin \pi n} = \frac{1}{\pi n^2}.$$

Hay al menos tres formas diferentes de calcular el residuo en el polo $z = 0$. Por completitud, veremos las tres. En primer lugar, notemos que podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} &= \frac{1}{z^2} \left(1 - \frac{(\pi z)^2}{2!} + \frac{(\pi z)^4}{4!} - \dots \right) \left(\pi z - \frac{(\pi z)^3}{3!} + \frac{(\pi z)^5}{5!} - \dots \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{z^2} \frac{1}{\pi z} \left(1 - \frac{(\pi z)^2}{2!} + \frac{(\pi z)^4}{4!} - \dots \right) \left(1 - \frac{(\pi z)^2}{3!} + \frac{(\pi z)^4}{5!} - \dots \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{z^2} \frac{1}{\pi z} \left(1 - \frac{(\pi z)^2}{2!} + \frac{(\pi z)^4}{4!} - \dots \right) \left(1 + \frac{(\pi z)^2}{3!} - \frac{(\pi z)^4}{5!} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{\pi z^3} \left(1 - \frac{(\pi z)^2}{3} + \dots \right), \end{aligned}$$

de modo que

$$\operatorname{Res} \left(\frac{\cot \pi z}{z^2}, 0 \right) = \frac{-\pi}{3}.$$

Es importante resaltar que para calcular el residuo solo necesitamos el coeficiente del término correspondiente a z^{-1} , pero necesitamos ser muy cuidadosos para asegurarnos de que tenemos en cuenta todos los términos que puedan contribuir a z^{-1} .

También podríamos haber usado el siguiente desarrollo en serie de $\cot z$:

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} - \frac{2z^5}{945} - \dots.$$

Entonces,

$$\frac{\cot \pi z}{z^2} = \frac{1}{\pi z^3} - \frac{\pi}{3z} - \frac{\pi^3 z}{45} - \frac{2\pi^5 z^3}{945} - \dots,$$

de donde se deduce que $z = 0$ es un polo de orden 3 con residuo $\frac{-\pi}{3}$.

Finalmente, también podríamos calcular el residuo en $z = 0$ usando el Lema 4 del Tema 8.

Consideremos ahora el cuadrado C_N descrito anteriormente. Cada lado del cuadrado tiene longitud $2N + 1$, de modo que todo el perímetro tiene longitud $4(2N + 1)$. Notemos que los polos del interior de C_N son los que se encuentran en $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$. Por el teorema de los residuos, tenemos

$$2\pi i \sum_{n=-N}^N \operatorname{Res} \left(\frac{\cot \pi z}{z^2}, n \right) = \int_{C_N} \frac{\cot \pi z}{z^2} dz.$$

Recordemos que en virtud del Lema 2, $|\cot \pi z| \leq M$ en C_N , donde la constante M no depende de N . Además,

$$\left| \frac{1}{z^2} \right| \leq \frac{1}{N^2}$$

para todo $z \in C_N$. Por el Lema de estimación,

$$\left| \int_{C_N} \frac{\cot \pi z}{z^2} dz \right| \leq \frac{M}{N^2} \ell(C_N) = \frac{M}{N^2} 4(2N + 1),$$

que tiende a cero cuando $N \rightarrow \infty$. Entonces,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \operatorname{Res} \left(\frac{\cot \pi z}{z^2}, n \right) = 0.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N \operatorname{Res} \left(\frac{\cot \pi z}{z^2}, n \right) &= \sum_{n=-N}^{-1} \operatorname{Res} \left(\frac{\cot \pi z}{z^2}, n \right) + \operatorname{Res} \left(\frac{\cot \pi z}{z^2}, 0 \right) + \sum_{n=1}^N \operatorname{Res} \left(\frac{\cot \pi z}{z^2}, n \right) \\ &= 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{\pi n^2} - \frac{\pi}{3}, \end{aligned}$$

que combinado con el límite anterior, nos dice que

$$2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{\pi n^2} - \frac{\pi}{3} = 0.$$

En conclusión, obtenemos

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

como queríamos ver.

En el siguiente vídeo se muestra otro ejemplo de aplicación del teorema de los residuos en el cálculo de la suma de series.

Vídeo Aplicación del teorema de los residuos en la suma de series

9.6. Problemas

1. Considera la integral real

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Razona por qué esta integral coincide con su valor principal. Usa el teorema de los residuos para evaluar esta integral.

Usa el teorema de los residuos para evaluar la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{1+x^2} dx.$$

Toma las partes real e imaginaria de la integral anterior para calcular las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{1+x^2} dx.$$

Observa que era evidente a priori que una de estas integrales es cero.

2. Evalúa la integral real

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)} dx.$$

3. Evalúa la integral real

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{28 + 11x^2 + x^4} dx.$$

4. Considera la función

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 4z + 5}.$$

Usa un contorno adecuado para demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 4x + 5} dx = \frac{-\pi \sin 2}{e}.$$

5. Considera la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{13 + 5 \cos t} dt.$$

(a) Usa el cambio de variable $z = e^{it}$ para demostrar que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{13 + \cos t} dt = \frac{2}{i} \int_{\gamma} \frac{1}{5z^2 + 26z + 5} dz,$$

donde γ es la circunferencia centrada en el origen de radio 1 recorrida en sentido antihorario.

(b) Demuestra que la función

$$f(z) = \frac{1}{5z^2 + 26z + 5}$$

tiene polos simples en $z = -5$ y $z = -\frac{1}{5}$. Comprueba que

$$\operatorname{Res} \left(f(z), -\frac{1}{5} \right) = \frac{1}{24}.$$

(c) Usa el teorema de los residuos para comprobar que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{13 + 5 \cos t} dt = \frac{\pi}{6}.$$

6. Calcula las integrales siguientes:

$$\int_0^{2\pi} (2 \cos^3 t + 3 \cos^2 t) dt, \quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 t} dt.$$

7. Usa el método descrito en este tema para comprobar que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

¿Por qué no puede usarse el mismo método para calcular la suma de la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$?

8. Considera dos reales $0 < a < b$. Calcula la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx$$

integrando una función adecuada en un contorno adecuado.

9. Sea $a \neq 0$. Considera la función

$$f(z) = \frac{\cot \pi z}{z^2 + a^2}.$$

Comprueba que f tiene polos en $z = n \in \mathbb{Z}$ y en $z = \pm ia$ y calcula los residuos en estos polos. Usa estos resultados para demostrar que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \coth \pi a - \frac{1}{2a^2}.$$

10. Considera el camino $\gamma(t) = e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$. Demuestra que

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i.$$

Usando el cambio de variable $z = e^{it}$, demuestra que

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t) dt = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \sin(\sin t) dt = 0.$$

Capítulo 10

Aplicaciones conformes y teorema de Riemann

10.1. Introducción y objetivos

El objetivo de este último tema es estudiar las aplicaciones conformes desde el punto de vista del análisis complejo. El resultado más importante desde el punto de vista teórico que introduciremos es el **teorema de Riemann**. Este teorema demuestra que todo dominio simplemente conexo es conformemente equivalente al disco unidad. La demostración de este teorema requiere de bastantes resultados previos, que se presentan en las primeras secciones del tema.

En la primera sección estudiaremos el comportamiento de la holomorfa cuando pasamos al límite. Dicho de otro modo, nos preguntaremos si dada una sucesión de funciones holomorfas, su límite también es una función holomorfa. El **teorema de Weierstrass** da la respuesta a esta pregunta. A continuación veremos algunas consecuencias de este resultado, siendo el **teorema de Hurwitz** el corolario más destacado.

La segunda sección del tema está destinada a estudiar si, dada una función holomorfa, existe una sucesión de funciones polinomiales o racionales que converja a nuestra función original. El **teorema de Runge** da la respuesta a esta cuestión. Antes de abordar el teorema de Runge, es necesario generalizar el teorema de Ascoli del análisis real al caso de las funciones holomorfas, obteniendo el **teorema de Montel**.

La sección tercera de este tema tiene dos grandes objetivos. El primero es **clasificar los automorfismos del disco**. Para ello, necesitaremos probar antes el **lema de Schwarz**. La segunda parte de esta sección está destinada a desarrollar métodos para encontrar aplicaciones conformes entre ciertas regiones del plano complejo. Esta segunda sección, a diferencia del resto del tema, está muy centrada en los ejemplos.

En la cuarta sección se enuncia y demuestra el **teorema de Riemann** a partir del teorema de la aplicación abierta y todos los resultados obtenidos en las primeras secciones del presente tema.

La quinta y última sección está destinada a **clasificar los automorfismos del plano complejo**. Veremos que todo automorfismo del plano complejo es necesariamente un polinomio de primer grado a coeficientes complejos. También enunciaremos y demostraremos el **principio de reflexión**.

10.2. Límite de funciones holomorfas

Queremos estudiar las propiedades de las funciones holomorfas ligadas al proceso de paso al límite. En particular, queremos ver si el límite de una sucesión de funciones holomorfas es holomorfo. También queremos condiciones que nos aseguren que toda sucesión de funciones tiene una parcial convergente y ver como se preservan los ceros y la inyectividad por paso al límite.

Teorema 10.2.1 (Teorema de Weierstrass). *Sea f_n una sucesión de funciones holomorfas en un dominio Ω y supongamos que para todo compacto $K \subset \Omega$, $f_n|_K$ converge uniformemente a $f|_K$. Entonces, f es holomorfa en Ω y $f_n^{(m)}|_K \rightarrow f^{(m)}|_K$ uniformemente sobre cada compacto de Ω .*

Este teorema nos dice que la convergencia uniforme sobre todos los compactos (que es más débil que la convergencia uniforme sobre Ω pero más fuerte que la convergencia puntual) es suficiente para asegurar la convergencia hacia una función holomorfa. Además, también implica la convergencia de las derivadas.

Demostración. Sea R un rectángulo contenido en Ω . Como ∂R es compacto en Ω , entonces $f_n|_{\partial R} \rightarrow f|_{\partial R}$ y por lo tanto

$$0 = \int_{\partial R} f_n(z) dz \rightarrow \int_{\partial R} f(z) dz$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces la integral de f a lo largo de la frontera de cualquier rectángulo contenido en Ω vale cero. Entonces, por el teorema de Morera, f es holomorfa. Falta ver que $f_n^{(m)} \rightarrow f^{(m)}$ uniformemente sobre compactos. Lo veremos primero para discos cerrados $\overline{D} \subset \Omega$. En efecto, si $D = D(a, r)$ y $\overline{D} \subset \Omega$, existe un $R > r$ de modo que $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$. En este caso, aplicamos la fórmula de Cauchy a $f_n^{(m)} - f^{(m)}$ y obtenemos que para todo $z \in \overline{D}(a, r)$,

$$f_n^{(m)}(z) - f^{(m)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|z-a|=R} \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw.$$

Entonces, para toda $z \in \overline{D}(a, r)$,

$$|f_n^{(m)}(z) - f^{(m)}(z)| \leq \frac{k! M_n R}{(R-r)^{k+1}},$$

donde $M_n = \sup\{|f_n(z) - f(z)| \mid |z-a| = R\}$. Por hipótesis, $M_n \rightarrow 0$ y por lo tanto $f_n^{(m)} \rightarrow f^{(m)}$ uniformemente en $\overline{D}(a, r)$. Finalmente, si K no es un disco cerrado y es un compacto arbitrario en Ω , existen discos D_i , $i = 1, \dots, n$ tales que $\overline{D}_i \subset \Omega$ y tales que $K \subset D_1 \cup \dots \cup D_n$. Como $f_n^{(m)} \rightarrow f^{(m)}$ uniformemente sobre cada D_i , entonces $f_n^{(m)} \rightarrow f^{(m)}$ uniformemente sobre K . \square

Como las funciones f_n son analíticas, su límite f no solo hereda la analiticidad, sino otras propiedades menos evidentes. En este sentido, podemos enunciar el teorema de Hurwitz.

Teorema 10.2.2 (Teorema de Hurwitz). *Sea Ω un abierto de \mathbb{C} y f_n una sucesión de funciones holomorfas en Ω tales que $f_n \rightarrow f$ uniformemente sobre compactos. Si $f \not\equiv 0$ y tenemos un disco $\overline{D} \subset \Omega$ tal que $f(z) \neq 0$ en ∂D , entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, f_n y f tienen el mismo número de ceros en D .*

Demostración. Como $f_n \rightarrow f$ uniformemente sobre compactos, sabemos por el teorema de Weierstrass que f es holomorfa en Ω . Para comparar el número de ceros de f_n y f en $D = D(a, r)$ usaremos el teorema de Rouché. En primer lugar veremos que se cumplen las hipótesis del teorema. Como $f(z) \neq 0$ si $z \in \partial D$, tenemos que $\delta = \inf\{|f(z)|, z \in \partial D\} > 0$. Además, como $f_n \rightarrow f$ uniformemente sobre compactos, existe un n suficientemente grande de modo que para todo $z \in \partial D$ se cumple que $|f(z) - f_n(z)| < \delta/2$. En este caso, $|f(z) - f_n(z)| < |f(z)|$ para todo $z \in \partial D$ y, por el teorema de Rouché, f y f_n tienen el mismo número de ceros. \square

Veamos ahora algunos corolarios del teorema de Hurwitz:

Corolario 10.2.3. *Si Ω es un dominio y f_n es una sucesión de funciones holomorfas en Ω que no se anulan nunca, que converge uniformemente sobre compactos hacia f holomorfa en Ω . Entonces, f es idénticamente nula en Ω o no se anula nunca.*

Corolario 10.2.4. *Si Ω es un dominio de \mathbb{C} y f_n es una sucesión de funciones holomorfas convergente uniformemente sobre compactos con límite holomorfo f y supongamos que las funciones f_n son inyectivas. Entonces, f es inyectiva o constante.*

Demostración. Tomemos un complejo $z_0 \in \Omega$ arbitrario. Veremos que o $f(z) = f(z_0)$ para todo $z \in \Omega$ o $f(z) \neq f(z_0)$ para todo $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$. Como esto será cierto para todo z_0 , ya tendremos demostrado el corolario. En el dominio $\Omega \setminus \{z_0\}$ las funciones $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_0)$ no tienen ceros. Además, $g_n(z) \rightarrow g(z) = f(z) - f(z_0)$. Por el corolario anterior, sabemos que o $g \equiv 0$ y, en este caso $f \equiv f(z_0)$ o $g(z) \neq 0$ en todo punto de $\Omega \setminus \{z_0\}$ y por lo tanto para todo $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$ se tiene que $f(z) \neq f(z_0)$ como queríamos ver. \square

10.3. Densidad de los polinomios

Otro tipo de resultados que tienen relación con la convergencia de funciones holomorfas son los resultados de compacidad. Ya sabemos que toda sucesión de funciones reales equicontinuas y equiacotadas en un compacto admite una parcial uniformemente convergente en el compacto (teorema de Ascoli). Veremos con el teorema de Montel que en el caso de funciones holomorfas podemos debilitar las hipótesis. En primer lugar daremos una definición:

Definición 10.3.1 (Familia normal). *Un conjunto Φ de funciones holomorfas en un abierto Ω es una **familia normal** si toda sucesión $\{f_n\}$ de Φ tiene una parcial convergente uniformemente sobre compactos en Ω .*

Teorema 10.3.2 (Teorema de Montel). *Sea Ω un abierto de \mathbb{C} y sea Φ una familia de funciones holomorfas en Ω tal que para todo compacto $K \subset \Omega$, existe una constante $M_K > 0$ de forma que para toda $f \in \Phi$, $|f(z)| < M_K$ para todo $z \in K$. Entonces, Φ es una familia normal.*

Demostración. Tomemos una sucesión f_n contenida en Φ . Demostraremos que existe una sucesión parcial convergente sobre compactos. Tomemos una sucesión de compactos K_n de forma que $\dots \subset K_n \subset K_{n+1} \subset K_{n+1} \subset \dots$ tal que $\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n = \Omega$. Una posibilidad es tomar

$$K_n = \{z \in \Omega \mid d(z, \Omega^c) \geq 1/n\} \cap \overline{D(0, n)}.$$

Empecemos con K_1 . En primer lugar, $\{f_n\}$ es una sucesión acotada en K_1 . Como f_n también está acotada en K_2 , por las desigualdades de Cauchy tenemos que f'_n está acotada en K_1 y por lo tanto f_n no solo es equiacotada sino que también es equicontinua. Veamos esto con más detalle. Fijemos un $\varepsilon > 0$ y tomemos un $\delta > 0$ de forma que $D(z, 2\delta) \subset K_2$ para toda $z \in K_1$. A continuación, elegimos δ' de forma que $D(z, \delta') \subset K_3$ si $z \in K_2$. En este caso, por las desigualdades de Cauchy, vemos que $|f'_n(z)| \leq N = M_{K_3}/\delta'$ para todo $z \in K_2$.

Si z, w son puntos de K_1 tales que $|z - w| < \delta$, entonces $f_n(z) - f_n(w) = \int_z^w f'_n(\zeta) d\zeta$. Como todo intervalo $[z, w] \subset K_2$ sabemos que $|f'_n(\zeta)| < N$ y, por lo tanto, $|f_n(z) - f_n(w)| \leq N\delta$. Tomando un δ lo suficientemente pequeño, tenemos que $|f_n(z) - f_n(w)| \leq \varepsilon$. El δ elegido no depende de n , de modo que la sucesión f_n es equicontinua. Por lo tanto, usamos el teorema de Ascoli que asegura la existencia de una parcial f_n^1 de f_n convergente uniformemente en K_1 . Tomemos esta parcial y repitamos el argumento con el compacto de salida K_2 en vez de K_1 . En este caso, habrá una nueva parcial f_n^2 de f_n^1 convergente uniformemente sobre K_2 .

Iterando este procedimiento obtendremos una sucesión de sucesiones

$$\{\{f_n^1\}, \{f_n^2\}, \dots\}$$

donde cada una es una parcial de la anterior y $\{f_n^i\}$ converge en K_i . Tomemos la sucesión $\{g_j\} = \{f_1^1, f_2^2, f_3^3, \dots\}$. Esta sucesión a partir de la posición j es una parcial de f_n^j convergente uniformemente en K_j . Además, es una parcial de la sucesión original f_n . Tomando cualquier compacto $K \subset \Omega$, existirá una n lo suficientemente grande de forma que $K \subset K_n$ y por lo tanto $\{g_n\}$ será uniformemente convergente sobre K , como queríamos ver. \square

El teorema de Montel será útil en la construcción de funciones holomorfas como veremos en la demostración del teorema de Riemann. Lamentablemente, tiene el problema de que no es un resultado constructivo: ni nos dice cuál es la parcial convergente ni mucho menos cuál es su límite.

Otro tipo de resultado es el de densidad de subespacios de funciones holomorfas. Sabemos que toda función holomorfa en un disco puede aproximarse por polinomios (desarrollo en serie de Taylor) y que toda función holomorfa en una corona puede aproximarse mediante funciones racionales con un polo en el centro de la corona (desarrollo en serie de Laurent). Una pregunta natural es si este es un resultado general, es decir, si toda función holomorfa en un abierto Ω puede aproximarse mediante funciones racionales con polos fuera del dominio. El siguiente resultado nos proporciona una respuesta afirmativa a esta pregunta.

Teorema 10.3.3 (Teorema de Runge). *Sea K un compacto en \mathbb{C} y sea $\{a_j\}$ una sucesión de puntos en $\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (la compactificación por un punto del plano complejo) de forma que en cada componente de $\mathbb{C}^\infty \setminus K$ hay como mínimo un punto de la sucesión. Entonces, para toda función f holomorfa en K (holomorfa en algún entorno abierto del compacto), existe una sucesión de funciones racionales R_n con polos solo en algunos a_j tal que $R_n \rightarrow f$ uniformemente en K .*

Dicho de otro modo, el conjunto de las funciones racionales con polos en $\{a_j\}$ es denso en el conjunto de funciones holomorfas en K con la convergencia uniforme.

La demostración de este resultado puede encontrarse en muchas de las referencias en la bibliografía de la asignatura.

Observemos que uno de los puntos a_j que aparecen en el enunciado del teorema de Runge podría ser el punto del infinito. Una función racional con un único polo en el punto del infinito puede entenderse como un polinomio.

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata del teorema de Runge.

Corolario 10.3.4. *Si $\mathbb{C}^\infty \setminus K$ es conexo (es decir, si K es simplemente conexo), toda función holomorfa en K puede aproximarse en K mediante polinomios.*

Demostración. Tomamos como sucesión solo el punto del infinito, $\{a_j\} = \{\infty\}$, y aplicamos el teorema de Runge. \square

10.4. Aplicaciones conformes

En los temas precedentes ya hemos visto la conexión entre las funciones y la topología de la región donde están definidas. A continuación vamos a profundizar en esta línea y veremos cuando dos dominios son equivalentes desde el punto de vista de las funciones. Estudiaremos un caso particularmente sencillo y a la vez muy interesante: el de los dominios simplemente conexos.

Ya sabemos que las funciones holomorfas con derivada no nula se pueden entender como aplicaciones de \mathbb{C} en \mathbb{C} que preservan los ángulos y la orientación. Estas aplicaciones reciben el nombre de aplicaciones conformes. Es especialmente interesante el estudio de la existencia de aplicaciones conformes biyectivas entre dos dominios del plano complejo Ω_1, Ω_2 . Este tipo de funciones reciben el nombre de **aplicaciones biholomorfas**. De esta forma, si conocemos las aplicaciones holomorfas del dominio

Ω_1 , también conocemos las del dominio Ω_2 simplemente componiendo con la aplicación biyectiva y holomorfa entre Ω_1 y Ω_2 . Por lo tanto, el estudio de las funciones holomorfas en Ω_2 queda reducido al estudio de las funciones holomorfas en Ω_1 .

Definición 10.4.1 (Dominios conformemente equivalentes). *Dos dominios Ω, Ω' del plano complejo son **conformemente equivalentes** si existe una aplicación $\phi: \Omega \rightarrow \Omega'$ holomorfa y biyectiva (ϕ es biholomorfa).*

Notamos que en este caso, la inversa $\phi^{-1}: \Omega' \rightarrow \Omega$ también es holomorfa.

En vista de los comentarios precedentes, sería extremadamente útil poder saber si dos dominios son conformemente equivalentes, especialmente si puede ser averiguado comparando características geométricas de los dos dominios. El teorema de Riemann es la herramienta fundamental para resolver este problema. Este teorema afirma que todo dominio $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ simplemente conexo es conformemente equivalente a un disco.

Es interesante notar que el plano complejo entero no puede ser conformemente equivalente al disco unidad $D(0, 1)$ ya que si $\phi: \mathbb{C} \rightarrow D(0, 1)$ fuera holomorfa, por el teorema de Liouville sería constante y no podría ser inyectiva.

La demostración del teorema de Riemann no es en absoluto trivial y requiere de un estudio previo de los automorfismos del disco, es decir de las aplicaciones biholomorfas del disco en el disco. Dejaremos la demostración del teorema de Riemann para la siguiente sección.

Antes de dar una caracterización de los automorfismos del disco, necesitamos un primer resultado que nos de una idea de la rigidez de las aplicaciones holomorfas del disco en si mismo.

Lema 10.4.2 (Lema de Schwarz). *Sea f una aplicación holomorfa del disco $D = D(0, 1)$ en si mismo que deja fijo el origen ($f(0) = 0$). Entonces, para todo $z \in D$, $|f(z)| \leq |z|$ y $|f'(0)| \leq 1$. Además, si alguna de las desigualdades anteriores se cumple con igualdad, se tiene que $f(z) = \lambda z$ para algún $|\lambda| = 1$.*

Antes de proceder a la demostración del lema de Schwarz, es conveniente presentar el principio del máximo, que se estudia en el siguiente vídeo:

Vídeo El principio del máximo

Demostración. Consideremos las funciones $f_r(z) = f(rz)$ con $0 < r < 1$. La función $\frac{f_r(z)}{z}$ es holomorfa en D y continua en \bar{D} . Por el principio del máximo,

$$\left| \frac{f_r(z)}{z} \right| \leq \sup_{|z|=1} \frac{|f_r(z)|}{|z|} \leq 1,$$

para todo $z \in D$. Es decir, para todo $z \in D$ se tiene que $|f(rz)| \leq |z|$. Si tomamos el límite cuando $r \rightarrow 1$, tenemos que $|f(z)| \leq |z|$ y, usando la definición de derivada,

tenemos que $|f'(0)| \leq 1$. Una vez visto esto, vemos que podemos definir la función holomorfa

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & \text{si } z \neq 0, \\ f'(0), & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Se cumple que $|g(z)| \leq 1$ para todo $z \in D$. Por lo tanto, si $|g(z)| = 1$ para algún punto interior, g es constante por el principio del máximo: $g(z) = \lambda$ para todo $z \in D$ para algún $|\lambda| = 1$. \square

Es fácil ver que las transformaciones del tipo

$$T_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad a \in D$$

son automorfismos del disco que preservan la circunferencia unidad (son los factores de Blaschke). Se puede probar que $T_a(0) = -a$ y $T_a(a) = 0$. Por otra parte, es trivial ver que es un automorfismo del disco con inversa $T_a^{-1} = T_{-a}$. Además de estos automorfismos, también tenemos las rotaciones y las composiciones de estos dos tipos de automorfismos. De hecho, gracias al lema de Schwarz, veremos que éstos son todos los automorfismos del disco.

Proposición 10.4.3. *Todo automorfismo $\phi: D \rightarrow D$ es de la forma $\phi = \lambda T_a$ con $|\lambda| = 1$ y $a \in D$.*

Demostración. Si ϕ es un automorfismo del disco y $b = \phi^{-1}(0)$, entonces $\psi = \phi \circ T_{-b}$ es un automorfismo del disco tal que $\psi(0) = 0$. Por el lema de Schwarz, $|\psi(z)| \leq |z|$ para todo $z \in D$. Por otra parte, ψ^{-1} también es una aplicación del disco en el disco con $\psi^{-1}(0) = 0$ y por lo tanto $|\psi(z)| \geq |z|$. Por lo tanto, $\psi(z) = \lambda z$ con $|\lambda| = 1$. Por lo tanto, $\phi(w) = \lambda T_b(w)$. \square

10.4.1. Ejemplos de aplicaciones conformes

En esta sección veremos múltiples ejemplos de aplicaciones conformes y como transforman ciertas regiones del plano complejo. También veremos algunas técnicas para encontrar aplicaciones conformes con ciertas características. En esta sección, a diferencia del resto del tema, nos centraremos en los ejemplos.

Ejemplo 10.4.4 (Algunas transformaciones sencillas). *En este primer ejemplo veremos tres transformaciones simples que transforman el interior de un disco en: el interior de otro disco, en el exterior de otro disco y en el semiplano superior.*

- *Queremos encontrar una aplicación conforme que transforme la circunferencia $C_1 = \{|z - i| = 1\}$ en la circunferencia $C_2 = \{|w| = 2\}$. Como $\left|\frac{w}{2}\right| = 1$, la transformación lineal $f(z) = 2z - 2i$, que amplía el primer círculo y traslada su centro, es una buena opción. Conviene resaltar que no existe una única transformación que cumpla nuestras condiciones. Como $f(i) = 0$, la aplicación f transforma el interior del primer círculo en el interior del segundo.*

- Supongamos ahora que queremos encontrar una transformación de Möbius g que transforme el interior del primer círculo en el exterior del segundo. Sea

$$g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

Imponemos que $g(i) = \infty$, de modo que, sin pérdida de generalidad,

$$g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{z - i}.$$

Tomemos los puntos $0, 1 + i, 2i \in C_1$. Tenemos

$$g(0) = i\beta, \quad g(1 + i) = \alpha(1 + i) + \beta, \quad g(2i) = 2\alpha - i\beta.$$

Una elección simple para imponer que las tres imágenes pertenezcan a la circunferencia C_2 es tomar $\alpha = 0$ y $\beta = 2$. Por lo tanto,

$$g(z) = \frac{2}{z - i}.$$

- Supongamos ahora que queremos encontrar una transformación de Möbius h que transforme la circunferencia C_1 en el eje real. Como $0, 1 + i, 2i$ pertenecen a C_1 y el eje real pasa por $0, 1, \infty$, elegimos h de forma que

$$h(0) = 0, \quad h(1 + i) = 1, \quad h(2i) = \infty.$$

Tomando

$$h(z) = \frac{z}{iz + 2}.$$

Notamos que $h(i) = i$, de modo que h transforma el interior de C_1 en el semiplano superior $\Im m(z) > 0$.

Ejemplo 10.4.5 (Aplicación conforme del disco al semiplano superior). Queremos encontrar una aplicación conforme que transforme el disco unidad $D(0, 1) = \{|z| < 1\}$ en el semiplano derecho $\{\Re e(z) > 0\}$. Buscaremos una transformación de Möbius que transforme la circunferencia $|z| = 1$ en el eje imaginario. Es fácil ver que esta aplicación debe tener un polo en sobre la circunferencia. Empecemos considerando la aplicación

$$w = f_1(z) = \frac{z + 1}{z - 1},$$

que satisface que $f_1(1) = \infty$ y $f_1(-1) = 0$. Por las propiedades de las transformaciones de Möbius estudiadas previamente, podemos concluir que f_1 transforma la circunferencia $|z| = 1$ en una recta que pasa por el origen. Para ver qué recta es, calculamos

$$f_1(i) = \frac{i + 1}{i - 1} = -i.$$

Por lo tanto, la imagen de la circunferencia ∂D_1 por la aplicación f_1 es el eje imaginario.

Como $f_1(0) = -1$, vemos que la imagen del interior del disco corresponde con el semiplano izquierdo $\Re(z) < 0$. Esto no es lo que queremos, pero podemos resolverlo aplicando una rotación de ángulo π , de modo que la transformación

$$w = f(z) = -\frac{z+1}{z-1} = \frac{1+z}{1-z}$$

cumple con nuestros requisitos. Por supuesto, no es la única transformación válida, ya que aplicando a f cualquier dilatación de centro en el eje imaginario o traslación vertical nos da una nueva respuesta a nuestro problema.

Ejemplo 10.4.6 (Transformando el interior del disco unidad en una franja horizontal infinita). Queremos encontrar una aplicación conforme que transforme el interior del disco unidad $D = D(0, 1)$ en la franja horizontal $\left\{-\frac{\pi}{2} < \Im(z) < \frac{\pi}{2}\right\}$.

Es fácil ver que la transformación

$$\phi(z) = \frac{1-z}{1+z}$$

transforma el interior del disco unidad en el semiplano derecho. Si

$$\text{Log } w = \ln |w| + i \text{Arg } w$$

es la determinación principal del logaritmo, como w varía en el semiplano derecho, vemos que $\text{Arg } w$ varía entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$. En consecuencia, la transformación que buscamos es

$$f(z) = \text{Log } \frac{1-z}{1+z}.$$

En el siguiente vídeo se ofrece una lista aún más amplia de aplicaciones conformes entre distintas regiones del plano complejo.

Vídeo Transformaciones conformes

10.5. Teorema de Riemann

Antes de proceder a la demostración del teorema de Riemann necesitamos enunciar un resultado de gran importancia.

Teorema 10.5.1 (Teorema de la aplicación abierta). Sea f una función holomorfa en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Entonces, $f(\Omega)$ es un conjunto abierto.

La demostración de este resultado es larga y tiene multitud de detalles técnicos. Puede encontrarse en muchos de los textos referenciados en la bibliografía.

En este punto, ya disponemos de las herramientas necesarias para demostrar el resultado principal de este tema: el teorema de Riemann.

Teorema 10.5.2 (Teorema de Riemann). *Si $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ es un dominio simplemente conexo, entonces Ω es conformemente equivalente a un disco.*

Demostración. Sea $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ es un dominio simplemente conexo y sea \mathcal{F} la familia de funciones holomorfas $f: \Omega \rightarrow D$ inyectivas. Dividiremos la demostración del teorema en tres etapas:

1. Empezaremos probando que la familia \mathcal{F} no es vacía. Para verlo, construiremos una función de \mathcal{F} . Sea $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. La función $z \mapsto z - w$ no se anula en ningún punto de Ω y, como Ω es simplemente conexo, existe una función ϕ holomorfa en Ω tal que $\phi^2(z) = z - w$. A partir de la definición de ϕ vemos que si $\phi(z_1) = \pm\phi(z_2)$ entonces $z_1 = z_2$ y por lo tanto ϕ es inyectiva. Además, $\phi(z_1) \neq \phi(-z_2)$ si $z_1 \neq z_2$. Como $\phi(\Omega)$ es un abierto del plano complejo por el teorema de la aplicación abierta, entonces contiene un disco $D(a, r)$ tal que $0 < r < |a|$. En este caso, el disco $D(-a, r)$ no interseca la imagen $\phi(\Omega)$. Por lo tanto, la aplicación $\psi(z) = \frac{r}{\phi(z) + a}$ pertenece a \mathcal{F} . De este modo hemos visto que \mathcal{F} no es vacío.
2. A continuación fijamos un $\alpha \in \Omega$. El objetivo de esta etapa es probar que si $f \in \mathcal{F}$ no es exhaustiva ($f(\Omega) \neq D$), entonces existe una función $g \in \mathcal{F}$ tal que $|f'(\alpha)| < |g'(\alpha)|$. Supongamos que f no es exhaustiva. Tomemos $\beta \in D \setminus f(\Omega)$. Sea entonces T_β el automorfismo que lleva β al origen. Entonces $T_\beta \circ f \in \mathcal{F}$ y no se anula en ningún punto. Por lo tanto, existe una función h holomorfa en Ω tal que $h^2 = T_\beta \circ f$. Como h^2 es inyectiva, también lo es h , de modo que $g = T_{h(\alpha)} \circ h \in \mathcal{F}$. Consideremos la función $\pi(z) = z^2$. Entonces, $f = T_{-\beta} \circ \pi \circ T_{-h(\alpha)} \circ g$, de modo que $f'(\alpha) = (T_{-\beta} \circ \pi \circ T_{-h(\alpha)})'(0)g'(\alpha)$. Es decir, si vemos que $|(T_{-\beta} \circ \pi \circ T_{-h(\alpha)})'(0)| < 1$ ya tendremos demostrado el segundo punto. Notemos ahora que $\psi = T_{-\beta} \circ \pi \circ T_{-h(\alpha)}$ es una función holomorfa del disco en el disco no inyectiva. Antes de usar el lema de Schwarz, hay que asegurarse de que $\psi(0) = 0$. Para verlo, consideremos $\gamma = \psi(0)$ y la función $T_\gamma \circ \psi$. Entonces, $|T'_\gamma(\gamma)\psi'(0)| < 1$, es decir $|\psi'(0)| < |T'_\gamma(\gamma)|^{-1} = 1 - |\gamma|^2 < 1$, como queríamos ver. A continuación veremos la etapa final de la demostración.
3. Sea $\eta = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(\alpha)| > 0$. De lo que hemos visto hasta ahora deducimos que si $f \in \mathcal{F}$ alcanza su supremo ($|f'(\alpha)| = \eta$), entonces f es exhaustiva y como pertenece a \mathcal{F} , también es inyectiva y holomorfa, es decir, una solución de nuestra problema. Para ver que podemos alcanzar el supremo, tomemos una sucesión $f_n \in \mathcal{F}$ tal que $|f'_n(\alpha)| \rightarrow \eta$. Como \mathcal{F} es una familia normal (todos sus miembros $g \in \mathcal{F}$ cumplen que $|g| < 1$), por el teorema de Montel existe una parcial $f_{n_k} \rightarrow f$ uniformemente convergente sobre compactos. Por el teorema de Weierstrass, f es holomorfa en Ω y $|f'(\alpha)| = \eta$. Además ya hemos visto que el límite de funciones holomorfas inyectivas es inyectivo o constante. Como $|f'(\alpha)| = \eta \neq 0$, f es inyectiva. Además, para toda n , $f_n(\Omega) \subset D$ y por paso al límite $f_n(\Omega) \subset \bar{D}$. Por otra parte, $f(\Omega)$ es abierto y llegamos a la conclusión que $f(\Omega) = D$ y $f \in \mathcal{F}$ como queríamos ver.

□

El teorema de Riemann puede mejorarse ligeramente de la forma siguiente:

Teorema 10.5.3 (Teorema de Riemann (2ª versión)). *Si $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ es un dominio simplemente conexo y $\alpha \in \Omega$, entonces existe una única aplicación f biholomorfa entre Ω y el disco unidad D tal que $f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha)$ es real y positiva.*

Demostración. Empezaremos probando la unicidad. Si existen dos funciones f, g con las propiedades deseadas, entonces $h = f \circ g^{-1}$ es una función holomorfa del disco en el disco biyectiva tal que $h(0) = 0$. Por el lema de Schwarz, tenemos que $h(z) = \lambda z$ con $|\lambda| = 1$. Por otra parte, $\lambda = h'(0) = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} > 0$. Es decir, que $\lambda = 1$ y $f = g$.

Para ver la existencia de una función f con las propiedades deseadas, partiremos de una función holomorfa y biyectiva $g: \Omega \rightarrow D$. Ya hemos visto gracias al teorema de Riemann que existe una. Ahora la modificaremos para ver que cumple el resto de condiciones. Sea $\beta = g(\alpha)$ y tomemos $h = T_\beta \circ g$. Como T_β es un automorfismo del disco h sigue siendo una biyección entre Ω y D . Además, $h(\alpha) = 0$. Podría ser que $h'(\alpha)$ no fuera real y positiva. En todo caso, $h'(\alpha) \neq 0$, ya que h es inyectiva. Tomemos $\lambda = \frac{\overline{h'(\alpha)}}{|h'(\alpha)|}$ y consideremos $f(z) = \lambda h(z)$. Con esta elección, $f: \Omega \rightarrow D$, $f(0) = 0$ y $f'(\alpha) = |h'(\alpha)| > 0$. □

10.6. Automorfismos de \mathbb{C} y el principio de reflexión

En la sección anterior hemos visto como son los automorfismos del disco. Del mismo modo es inmediato ver que todo automorfismo de un dominio simplemente conexo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ es de la forma $f^{-1} \circ T \circ f$, donde f es un biholomorfismo de Ω en D y T es un automorfismo del disco.

El siguiente resultado clasifica los automorfismos del plano complejo \mathbb{C} .

Teorema 10.6.1. *Todo automorfismo $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es de la forma $f(z) = az + b$ con $a \neq 0$.*

Demostración. Sea f un biholomorfismo de \mathbb{C} en \mathbb{C} . Entonces, la función $g: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ es una función holomorfa inyectiva en todo el plano salvo en el origen, donde tiene una singularidad aislada. La singularidad en el origen no puede ser evitable, ya que si lo fuera,

$$\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = L$$

y en consecuencia la función f estaría acotada y por el teorema de Liouville sería constante, cosa que no es posible ya que f es inyectiva. Vamos a ver que la singularidad tampoco puede ser esencial. Por el teorema de la aplicación abierta, la imagen

del disco $D(2, 1)$ por g es un abierto ya que g es holomorfa. Por otro lado, si g presenta una singularidad esencial, la imagen de todo entorno del origen es densa en \mathbb{C} . En particular, $g(D(0, 1) \setminus \{0\}) \cap g(D(2, 1)) \neq \emptyset$. Esto implica que g no es inyectiva, lo que no es posible. Por lo tanto, la singularidad de g en el origen es un polo, es decir, existe un $n > 0$ tal que $\lim_{z \rightarrow 0} z^n g(z) = 0$. Dicho de otro modo, $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z^n} = 0$. A partir de las desigualdades de Cauchy, vemos que $f^{(n+1)} \equiv 0$ de modo que f es un polinomio. Los únicos polinomios inyectivos que existen son los de primer grado, de modo que necesariamente $f(z) = az + b$. \square

Antes de dar por terminado el estudio de las aplicaciones conformes, veremos el principio de reflexión de Schwarz. Este principio permite, en determinadas situaciones, extender el dominio de definición de una función holomorfa. Empecemos precisando algunas notaciones. Denotaremos por Π^+ al semiplano superior, i.e. $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$. Sea Ω un dominio del plano complejo tal que la intersección de $\bar{\Omega}$ con la recta real es un intervalo J . Decimos que $\Omega^+ = \Omega \cap \Pi^+$ y Ω^- es la reflexión del dominio Ω^+ respecto a la recta real.

Teorema 10.6.2 (Principio de reflexión). *Si f es una función holomorfa en el dominio Ω^+ y se puede extender a una función continua en $\Omega^+ \cup J$ de forma que $f(x) \in \mathbb{R}$ si $x \in J$, entonces f admite una extensión holomorfa al dominio $\Omega^+ \cup J \cup \Omega^-$.*

Demostración. Empecemos definiendo g como $g(z) = f(z)$ si $z \in \Omega^+ \cup J$. Si $z \in \Omega^-$, definimos $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Es un ejercicio sencillo comprobar que g satisface las ecuaciones de Cauchy–Riemann en Ω^- . En efecto, si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, si $z \in \Omega^-$, $g(z) = \overline{f(\bar{z})} = u(x, -y) - iv(x, -y) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$. Tenemos que comprobar que $\tilde{u}_x = \tilde{v}_y$ y que $\tilde{u}_y = -\tilde{v}_x$. Efectivamente $\tilde{u}_x = u_x = v_y = \tilde{v}_y$ y $\tilde{u}_y = -u_y = v_x = -\tilde{v}_x$. Por lo tanto g es holomorfa en $\Omega^+ \cup \Omega^-$. Como f es real en J , tenemos que g es continua en $\Omega^+ \cup J \cup \Omega^-$. Falta ver que g es holomorfa en toda la unión. Para verlo, tomemos un rectángulo R contenido en $\Omega^+ \cup J \cup \Omega^-$. Si $R \subset \Omega^\pm$, entonces $\int_{\partial R} g(z) dz = 0$. Falta estudiar el caso en que el rectángulo corte el eje real. En este caso partimos R en dos rectángulos R^+ y R^- , cada uno de ellos en Π^+ y Π^- respectivamente. Tenemos que ver que $\int_{\partial R^+} g(z) dz = 0$ y que $\int_{\partial R^-} g(z) dz = 0$. Tomamos una sucesión de rectángulos R_n contenidos estrictamente en Ω^+ tales que $R_n \rightarrow R^+$. Como g es holomorfa en Ω^+ , entonces $\int_{\partial R_n} g(z) dz = 0$. Además, por la continuidad de g se tiene que $\int_{\partial R_n} g(z) dz \rightarrow \int_{\partial R^+} g(z) dz$. El caso de R^- se estudia de forma análoga. \square

10.7. Problemas

1. Considera la transformación de Möbius

$$f(z) = \frac{z}{2z - 8}.$$

Encuentra la imagen del disco $D = \{|z - 2| \leq 2\}$ por la aplicación f .

Solución: $f(D) = \{\Re(z) \leq 0\}$.

2. Demuestra que la función

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

definida en \mathbb{C}^∞ es una aplicación conforme que transforma el interior del disco unidad en el exterior del disco unidad.

3. Encuentra una aplicación conforme que transforme el primer cuadrante ($\Re(z), \Im(z) > 0$) en el semiplano superior ($\Im(z) > 0$).

Solución: $f(z) = z^2$.

4. Encuentra una aplicación conforme que transforme la región $D_1 = \{|z| > 1\}$ en el semiplano $D_2 = \{\Re(z) < 0\}$.

Solución: $f(z) = \frac{1 - z}{1 + z}$.

5. Encuentra una transformación de Möbius que transforme la región $A_1 = \{|z - i| < 2\}$ en la región $A_2 = \{|z - 1| > 3\}$.

Solución: $f(z) = \frac{z - 7i}{z - i}$.

6. Busca una transformación de Möbius que transforme el semiplano definido por $\Im(z) > \Re(z)$ en el interior del disco $D(1, 3)$.

Solución: $f(z) = \frac{(1 + 3i)z + 4i}{z + i}$.

7. Demuestra que la aplicación $f(z) = e^z$ es una aplicación conforme que transforma la franja horizontal

$$\{z \in \mathbb{C} \mid a < \Im(z) < a + \alpha\}$$

en el sector circular

$$\{z \in \mathbb{C}^* \mid a < \text{Arg } z < a + \alpha\}$$

para todo $\alpha \in (0, 2\pi)$.

8. Encuentra una aplicación conforme que transforme la región

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \Re(z), \Im(z) > 0\}$$

en el semiplano superior $\Im(z) > 0$.

Solución: Puede hallarse una solución componiendo de forma adecuada algunas de las transformaciones vistas hasta ahora. Una posible solución es: $f(z) = \left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)^2$.

9. Demuestra que la aplicación conforme

$$f(z) = z + \frac{1}{z}$$

transforma la región

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0, |z| > 1\}$$

en el semiplano superior.

10. Encuentra una aplicación conforme que transforme la semifranja vertical

$$A = \left\{ -\frac{\pi}{2} < \Re(z) < \frac{\pi}{2}, \Im(z) > 0 \right\}$$

en el semiplano superior.

Solución: $f(z) = \sin z$.